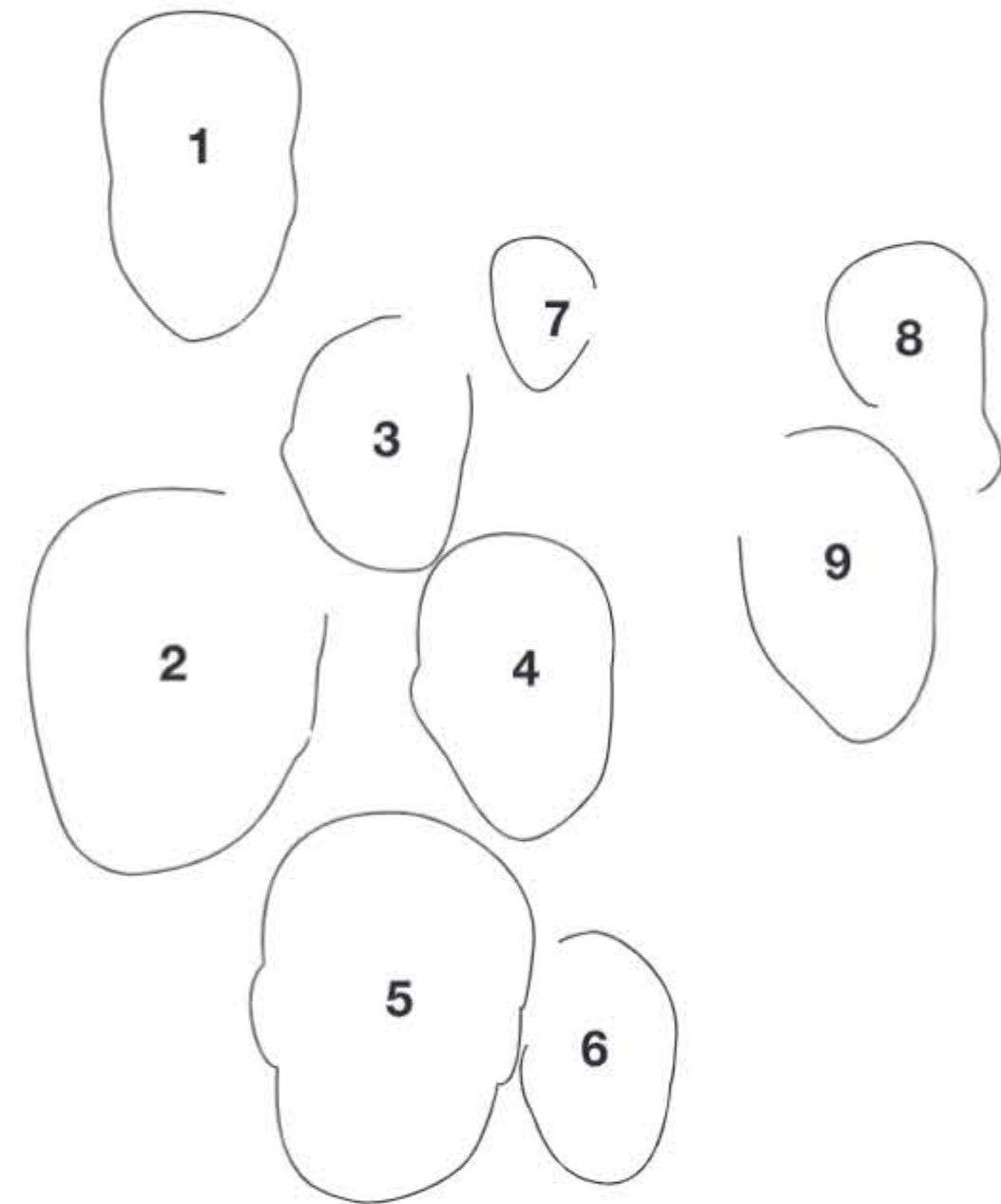


Optimisation

pour l'analyse
économique et
les sciences de gestion



1 | Georges AKERLOF (1940-). Né dans le Connecticut, Georges Akerlof est docteur en sciences économiques du Massachusetts Institute of Technology (MIT). Professeur à Berkeley, le prix Nobel d'économie lui a été décerné en 2001, en compagnie de Joseph Stiglitz et Michael Spence pour ses travaux sur l'asymétrie d'information et la « sélection adverse ».

2 | Oliver E. WILLIAMSON (1932-). Né dans le Wisconsin, Oliver E. Williamson est docteur de l'Université Carnegie-Mellon. Professeur à Berkeley, il est le fondateur de la « nouvelle économie institutionnelle », où un rôle central est attribué au concept de coût de transaction, développé dans un article célèbre du prix Nobel 1991, Ronald Coase.
Photo : © <http://groups.haas.berkeley.edu/bpp/oww/>

3 | Maurice ALLAIS (1911-). Né à Paris, Maurice Allais est sorti major de l'École polytechnique en 1933. Il a obtenu le prix Nobel d'économie en 1988. Ses travaux ont eu une influence déterminante après-guerre sur les ingénieurs-économistes français (*L'Économie pure* (1943) et *Économie et intérêt* (1947)) mais une part significative de sa réputation internationale est due aussi au « paradoxe d'Allais », remise en cause de la théorie face au risque de von Neumann et Morgenstern.

4 | Joseph STIGLITZ (1943-). Né dans l'Indiana, Joseph Stiglitz est, à 26 ans, professeur à l'Université de Yale. La thèse de cet ancien étudiant du Massachusetts Institute of Technology (MIT), portant sur le rationnement du crédit, est célèbre dans le monde universitaire. J. Stiglitz développera par la suite ses analyses sur l'imperfection de l'information et ses conséquences sur le fonctionnement des marchés. Chef de file des nouveaux keynésiens, il a obtenu le prix Nobel d'économie en 2001 (en même temps que G. Akerlof et M. Spence).

5 | Robert LUCAS (1937-). Né dans l'État de Washington, Robert Lucas enseigne depuis 1965 à l'Université de Chicago. Principal représentant de la « nouvelle macroéconomie classique », le prix Nobel d'économie lui a été décerné en 1995 pour ses travaux sur les anticipations rationnelles et leurs conséquences quant à la stabilité des modèles économétriques (*Lucas's critique*) et aux limites des interventions publiques (*impotence result*).
Photo : © Université de Chicago

6 | Kenneth Joseph ARROW (1921-). Né à New-York, Kenneth J. Arrow s'oriente en 1941 vers l'économie à l'Université de Columbia. Il est connu pour sa démonstration de l'existence d'un équilibre général de concurrence, ses travaux sur le risque et son « théorème d'impossibilité » (agrégation 'impossible' des préférences individuelles en une fonction satisfaisante de choix collectif). Il a obtenu le prix Nobel d'économie en 1972, avec John Hicks.

7 | Paul KRUGMAN (1953-). Né à New-York, Paul Krugman est diplômé du Massachusetts Institute of Technology (MIT), université où il enseigne ainsi qu'à Yale, Stanford et Princeton. Ce nouveau keynésien, défenseur du libre-échange tempéré et spécialiste de l'économie internationale, s'appuie sur l'analyse de la concurrence imparfaite pour rectifier certaines des conclusions de l'analyse néoclassique.

8 | Milton FRIEDMAN (1912 – 2006). Né à Brooklyn, Milton Friedman a enseigné à l'Université de Chicago, de 1946 à 1977. Il a été le pape du retour au libre marché, de la déréglementation et de l'abandon de la politique budgétaire au profit de la politique monétaire. Chef de file d'une véritable contre-révolution keynésienne dès les années 50, il a vu ses idées triompher dans les années 70 et a reçu le prix Nobel en 1976.

9 | Barry EICHENGREEN (1952-). Né en Californie, Barry Eichengreen a fait des études d'économie et d'histoire à l'Université de Yale et enseigne aujourd'hui à l'Université de Berkeley. Il a notamment fait des propositions pour construire une architecture financière internationale et une architecture financière européenne.
Photo : © 2008 Robert Houser

Ouvertures Économiques

Optimisation

pour l'analyse
économique et
les sciences de gestion

Jean-Christophe **Poudou** et
Lionel **Thomas**

Préface de David **Martimort**

Crédits photos de couverture :

Si malgré nos soins attentifs, certaines demandes n'étaient pas parvenues aux auteurs ou à leurs ayants droits, qu'ils veuillent bien nous en tenir informés.

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboeck.com**

© Groupe De Boeck s.a., 2011
Rue des Minimes 39, B-1000 Bruxelles

1^{re} édition

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale, Paris : novembre 2011

Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2011/0074/241

ISSN 2030-2061

ISBN 978-2-8041-6573-4

PRÉFACE

Lorsqu'on fait le tour des ouvrages d'optimisation disponibles sur le « marché », il est difficile de trouver un manuel qui satisfasse à la fois étudiants et enseignants de nos facultés. Passons outre le fait que l'offre est essentiellement en langue anglaise, et contentons nous d'observer que les ouvrages disponibles ont souvent les défauts, rédhibitoires selon moi, de s'adresser à des publics très avancés et de considérer l'enseignement des outils de l'optimisation de manière assez déconnectée des autres cours d'économie de nos facultés.

C'est donc un vide assez conséquent sur nos étagères que l'ouvrage de Jean-Christophe Poudou et Lionel Thomas s'apprête à remplir. L'étudiant trouvera ici le bon niveau d'entrée pour la maîtrise des outils de l'optimisation qu'elle soit statique ou dynamique. L'abondance d'exercices et d'applications économiques lui permettront alors de consolider au mieux l'acquisition des concepts développés. L'enseignant y glânera quant à lui de nombreuses astuces pédagogiques. Il se délectera de la rigueur des arguments et il se plaira à éveiller l'intérêt de différents publics auxquels il peut être confronté en empruntant les passerelles jetées par les auteurs entre les concepts les plus basiques et les développements les plus avancés de la théorie.

Un ouvrage de cette facture ne pouvait être le fait que de deux enseignants-chercheurs de talent qui mettent ainsi leur expérience de la recherche et de l'enseignement à la disposition d'un large public. Je ne saurais donc que trop recommander sa lecture et son acquisition. Ce manuel devrait sans nul doute s'imposer comme l'ouvrage de référence en langue française pour les années à venir.

David Martimort.

Directeur d'Études à l'École des Hautes Études en Sciences Sociales.
Paris School of Economics - École d'Économie de Paris ; FRANCE.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier les collègues, étudiants et amis qui nous ont épaulés au cours de la rédaction de cet ouvrage : Sylvain Hours pour sa lecture attentive, David Martimort pour son appui, Wilfried Sand-Zantman pour ses encouragements et ses conseils, deux référents anonymes pour leurs suggestions et remarques, ainsi qu'un certain nombre de collègues de l'Université de Besançon pour leur soutien permanent et leur modestie. Ce livre est également une marque de reconnaissance à l'attention de ceux qui nous ont formés aux mathématiques appliquées durant nos études d'économie à l'Université Montpellier 1.

INTRODUCTION

Le mathématicien du 17^e siècle L. Euler notait qu'il n'y a rien dans l'univers qui ne soit un maximum ou un minimum. Cet adage s'applique aux phénomènes économiques et aux règles de gestion en ce sens que les individus, les entreprises, les organisations etc. cherchent le plus souvent à optimiser leur décisions : minimiser les coûts, les efforts, les risques, les peines ou bien encore maximiser le rendement, le profit, le chiffre d'affaire, le plaisir. Les techniques et méthodes qui rendent compte de cette idée de recherche de l'optimum se regroupent sous le terme d'optimisation. Plus précisément, l'optimisation est la branche des mathématiques recherchant la valeur la plus élevée (maximum) ou la plus faible d'une fonction. Deux questions viennent immédiatement à l'esprit :

- pourquoi l'analyse économique et les sciences de gestion ont-elles recours à des fonctions ?
- pourquoi s'intéresser aux valeurs extrêmes de ces fonctions ?

La présentation du problème suivant permet d'entrevoir la réponse. Une entreprise envisage de fabriquer un nouveau produit. Sa décision dépend du caractère profitable de cette activité. Afin de déterminer si elle va gagner plus d'argent qu'elle ne va en dépenser, l'entreprise réalise deux études :

- l'une de marché indiquant le prix auquel elle pourra vendre son produit selon la quantité qu'elle envisage d'écouler auprès des acheteurs ;
- l'autre technique afin de savoir ce que lui coûte chaque niveau de production.

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Production : q	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix de vente : p	12	11	10	9	8	7	6	5
Coût total : CT	13,5	16	19,5	24	29,5	36	43,5	52

Elle mesure ensuite la recette totale (son chiffre d'affaire) en multipliant pour chaque niveau de production le prix par la quantité. Le tableau suivant est obtenu :

Production : q	1	2	3	4	5	6	7	8
Recette totale : RT	12	22	30	36	40	42	42	40

Enfin, l'entreprise évalue son profit en calculant la différence entre les entrées d'argent (la recette totale) et les sorties (le coût total). Le profit est porté dans le dernier tableau.

Production : q	1	2	3	4	5	6	7	8
Profit : π_e	-1,5	6	10,5	12	10,5	6	-1,5	-12

Ainsi, seules les productions comprises entre 2 et 6 sont profitables, les autres coûtant plus qu'elles ne rapportent. L'entreprise peut se lancer dans cette nouvelle activité si elle se restreint à ces niveaux. Néanmoins, l'analyse de l'allure du profit va affiner sa décision. En effet, lorsque la production est inférieure à 4, le profit varie dans le même sens que la quantité : l'augmentation de la production entraîne une hausse du profit. Le phénomène inverse a lieu au delà de 4 : un accroissement de la quantité débouche sur un profit qui diminue. Un graphique reliant chaque production au profit qu'elle génère permet de visualiser cette relation de façon plus immédiate (figure 1).

Ce constat reste vrai si l'entreprise fabrique un bien divisible, c'est-à-dire est en mesure de produire n'importe quelle proportion du produit. On obtient le schéma de la figure 2.

Suite à ces observations, l'entreprise déduit que parmi l'ensemble des productions profitables, une seule, à savoir $q = 4$, est associée au profit maximal, $\pi_e = 12$. Dès lors, si l'en-

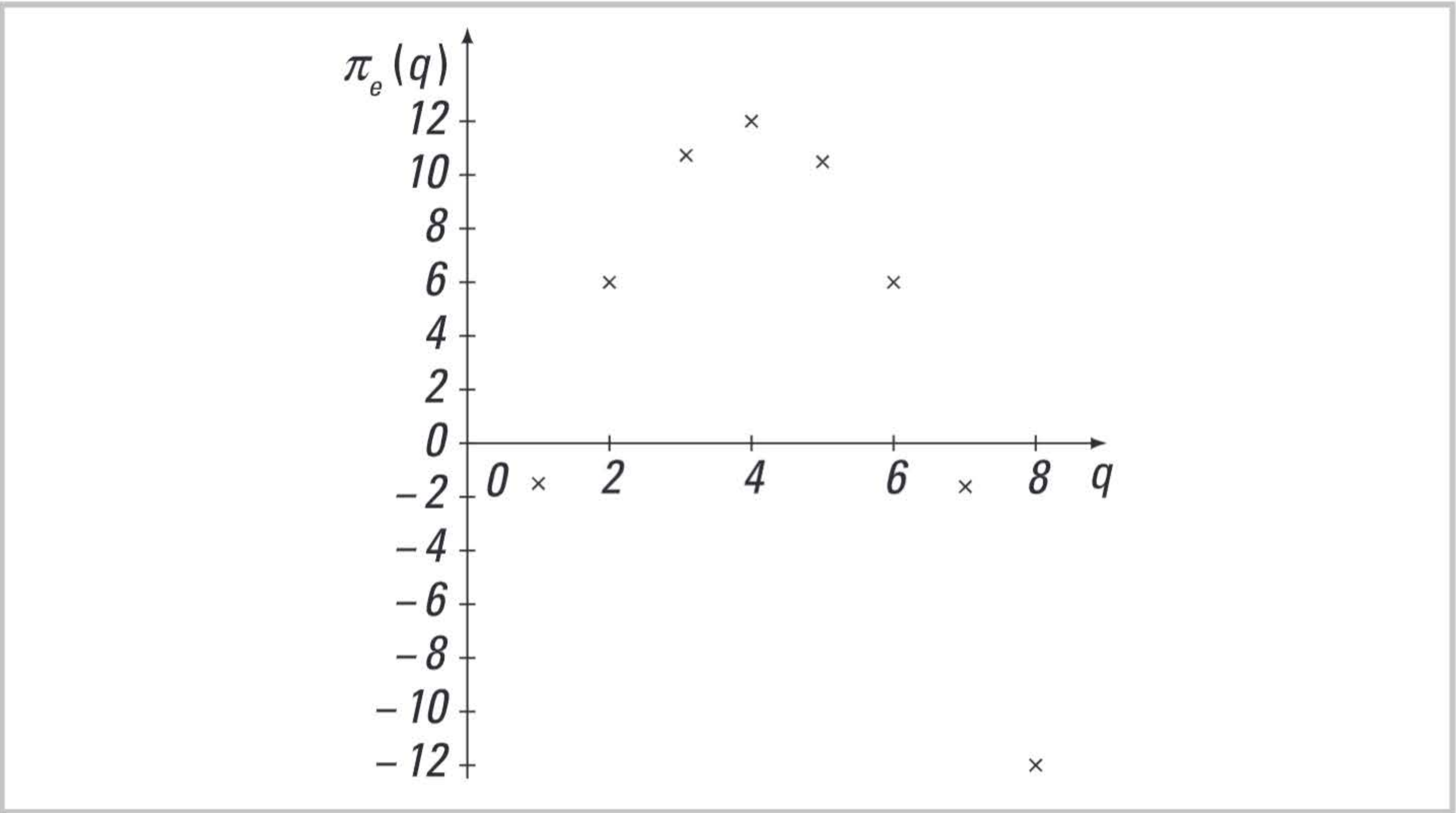
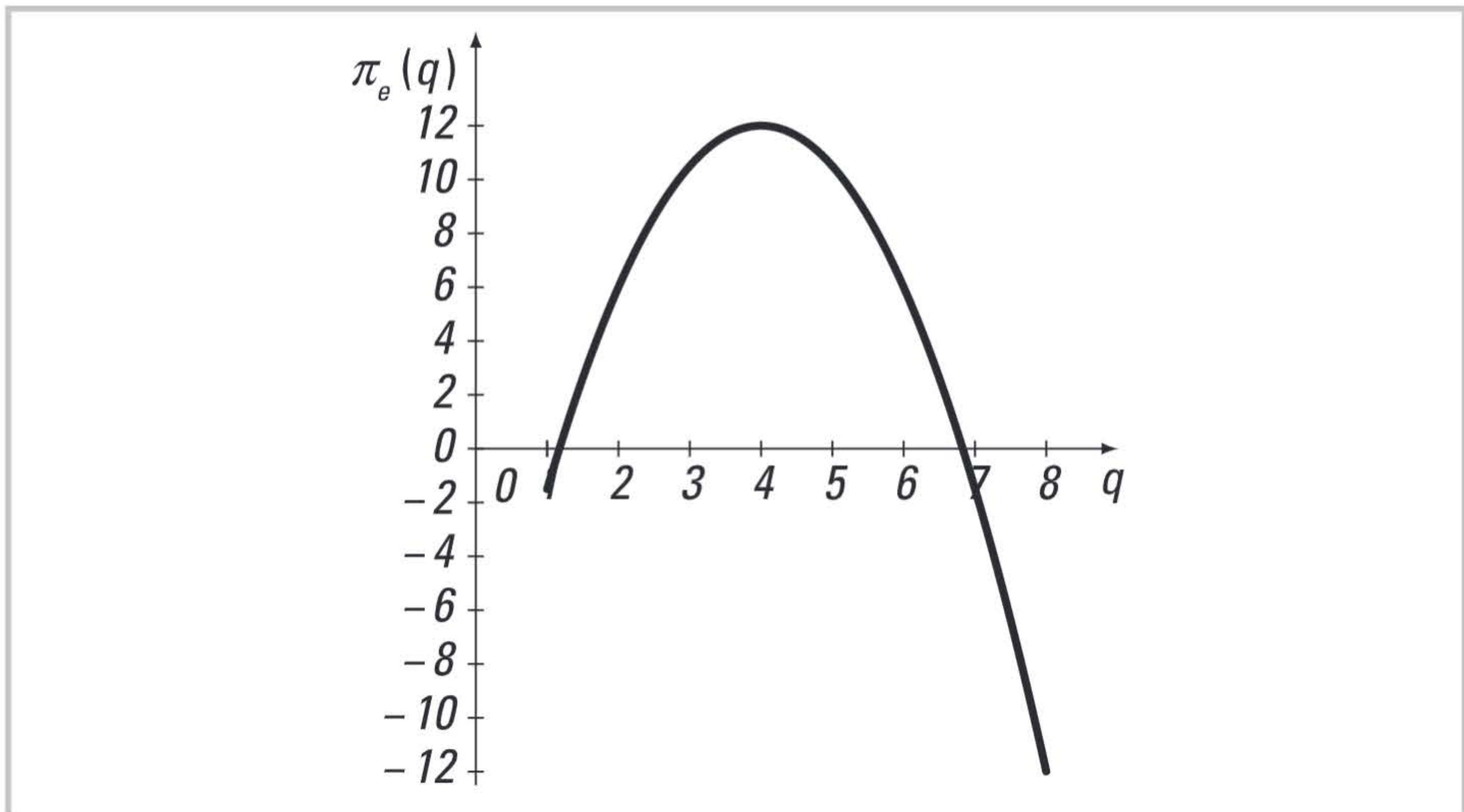


FIGURE 1
Le profit du producteur

**FIGURE 2**

Le profit du producteur (production divisible)

treprise est rationnelle, c'est-à-dire, si, à se lancer dans une activité rentable, autant qu'elle le soit le plus possible, elle doit choisir de produire cette quantité. La firme qualifie cette quantité d'optimale car elle lui apporte le profit le plus élevé.

À travers cet exemple concret, on vient de résoudre le problème du calcul économique du producteur consistant à trouver la quantité garantissant le profit maximum. Analysons la démarche que l'on vient de mener. Dans un premier temps, à travers les études effectuées, le producteur parvient à relier le profit qu'il obtient à la quantité qu'il fabrique. Autrement dit, il construit ce qu'en mathématique on appelle une fonction : elle lui indique la valeur du profit selon la décision prise en matière de production. On souligne ainsi l'utilité des fonctions en économie et en gestion car elles mesurent l'influence des décisions d'un agent économique sur une issue le concernant. Cela constitue la réponse à la première question posée initialement.

Dans un second temps, le producteur choisit parmi l'ensemble des productions profitables, celle qui lui rapporte le profit maximum. Il recherche donc la quantité qui lui assure la valeur la plus élevée de sa fonction de profit, ce qui traduit sa rationalité. On tient là la réponse à la deuxième question : ces disciplines tirent un bénéfice de l'optimisation car elle permet d'élire la décision efficace d'un agent économique guidé par un choix rationnel.

Cet exemple a permis d'identifier les éléments essentiels de l'optimisation. Plus généralement, à la base de l'analyse économique se trouve le concept de rareté, c'est-à-dire

une situation dans laquelle les besoins dépassent les ressources dont on dispose pour les satisfaire. Dès lors, si une ressource n'est disponible qu'en quantité limitée, son utilisation nécessite des choix. L'économie se définit ainsi comme la science des choix.

Parallèlement, la gestion qui regroupe l'ensemble des techniques d'organisation mises en œuvre pour l'administration d'une entité, est également basée sur la réalisation de choix. C'est le cas pour l'approvisionnement des stocks, les plans de transport, la formation du personnel. En ce sens, les sciences de gestion font aussi référence à la sélection des meilleures pratiques et des procédures optimales.

Or, faire des choix nécessite d'évaluer la valeur des différentes alternatives, c'est-à-dire leur coût d'opportunité. Plus précisément, le coût d'opportunité d'une décision représente la valeur de la meilleure alternative à laquelle on renonce par cette décision. Par conséquent, si les choix sont guidés par la comparaison des coûts d'opportunité, les agents économiques peuvent être qualifiés de rationnels. On peut alors analyser la prise de décision des agents en supposant qu'ils cherchent à atteindre des objectifs tout en respectant des contraintes liées à la rareté qui limitent les choix possibles.

Bien évidemment, ces questions sont complexes et leur apporter une réponse définitive est une tâche ardue. C'est pourquoi il est approprié d'utiliser des modèles qui fournissent une vision simplifiée de la réalité. La modélisation débouche en économie sur deux types d'analyse, l'une macroéconomique (l'économiste étudie les caractéristiques de l'ensemble de l'économie), l'autre microéconomique (il s'intéresse à l'activité économique des acteurs). En gestion, la modélisation permet aussi bien d'appréhender les décisions stratégiques (politique à long terme des entités), que les décisions tactiques (politique à moyen terme) ou encore les décisions opérationnelles (politique de court et très court terme).

Ainsi, le calcul économique du producteur n'est qu'un cas particulier des problèmes d'optimisation étudiés. Pour mener une analyse plus systématique de l'optimisation en économie et en gestion, il faut :

- premièrement, définir le problème étudié, ce qui nécessite trois étapes :
 - associer à chaque agent économique une fonction objectif, c'est-à-dire une fonction résumant le but qu'il poursuit (le profit pour le producteur) ;
 - spécifier la variable de décision (voire les variables) influençant cette fonction objectif (la quantité pour le producteur) ;
 - évaluer les contraintes s'exerçant sur la variable de décision (par exemple l'existence d'un stock pour le producteur) ;
- deuxièmement, posséder des outils permettant d'étudier l'allure du problème (savoir quand le profit croît puis décroît pour le producteur) afin d'être en mesure de déterminer la décision optimale (la quantité assurant le profit maximum pour le producteur) ;
- troisièmement, mener les interprétations pertinentes des résultats obtenus.

Le but de ce manuel est de présenter ces trois points. Le développement se fait de manière progressive. Chaque nouvel aspect est rattaché aux points examinés précédemment et illustré à partir de l'exemple développé dans cette introduction qui sert ainsi de fil rouge tout au long de cet ouvrage. Par ailleurs, par souci de simplicité, lorsque la démonstration d'une notion est trop complexe, elle est renvoyée en annexe de façon à laisser une part prépondérante à l'interprétation et aux illustrations. Ce manque de rigueur est le prix à payer pour que le lecteur, dans un premier temps, se centre sur les intuitions découlant de chaque concept et sur les interprétations économiques que l'on peut en tirer, puis, dans un second temps, comprenne que l'optimisation n'est ni inaccessible ni une fin en soi, mais simplement un outil d'analyse pertinent.

Ce parti pris amène ainsi à ne présenter pour l'essentiel que des problèmes ne comprenant que deux variables de décision et deux contraintes pour l'optimisation statique. De même, l'optimisation dynamique est développée en ne considérant qu'une variable de contrôle et d'état. Toutefois, les démonstrations réalisées en annexe utilisant les notations vectorielles et matricielles permettent au lecteur de faire facilement le pont avec des problèmes plus généraux.

Ce manuel est organisé autour de deux chapitres. Le premier d'entre eux est consacré à l'optimisation statique, tandis que le second aborde l'optimisation dynamique.

OPTIMISATION STATIQUE

SOMMAIRE

1.1	Fonctions : éléments de base et interprétations	2
1.2	Notion de maximum	6
1.3	Optimisation libre	7
1.4	Optimisation sous contrainte	20
1.5	Prolongements	40
1.6	Programmation linéaire	48
1.7	Applications	54
1.8	Exercices	79

L'optimisation statique fait référence à un problème d'optimisation dans lequel le temps n'intervient pas¹. Le choix de l'agent économique se fait à une période (ou un instant) donnée et n'a d'influence qu'à cette période. Malgré cette restriction, plusieurs cas peuvent être étudiés.

Reprenons le cas du producteur. On a vu dans l'introduction qu'il maximise son profit à l'aide de la quantité qu'il produit. Il peut rencontrer deux situations :

- il n'y a pas de contraintes dans la capacité de production et tous les niveaux sont possibles ;
- de telles limitations existent. Par exemple, lorsque le producteur exploite un minerai, la quantité produite ne peut excéder la taille du gisement (on parle alors de ressource non-renouvelable). Le producteur doit respecter une contrainte car la production ne peut prendre que certaines valeurs.

Ce chapitre débute en présentant les éléments de base sur les fonctions et leurs interprétations qui seront utilisés tout au long du manuel. Puis la notion de maximum est définie. Ensuite, l'articulation se fait autour de l'absence de contrainte ou non dans l'optimisation. Dans le premier cas, l'optimisation est dite libre. Sinon, elle est qualifiée de contrainte. La section suivante prolonge ces analyses. Une section supplémentaire étudie la programmation linéaire. La dernière traite des applications en économie et gestion².

1.1 FONCTIONS : ÉLÉMENTS DE BASE ET INTERPRÉTATIONS

Examinons pour commencer les fonctions d'une variable.

1.1.1 Fonction d'une variable

Définition 1.1. (Fonction 1). *Une fonction réelle f d'une variable réelle est une application d'un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$, dont tout élément de \mathcal{E} n'a qu'une seule image dans \mathcal{F} . On la note :*

$$f : x \rightarrow f(x)$$

Le cas du producteur : La fonction de profit est $\pi : q \rightarrow \pi(q)$. L'ensemble \mathcal{E} correspond à \mathbb{R}_+ puisque les productions positives, *a priori*, sont acceptables, et \mathcal{F} correspond à l'ensemble des valeurs du profit.

Exemple : Il est possible de vérifier que le profit évalué dans l'introduction correspond à la fonction $\pi_e : q \rightarrow \pi_e(q) = 12q - \frac{3}{2}q^2 - 12$. On a donc $\mathcal{E} = \mathcal{Q} = [1; 8]$ et $\mathcal{F} = \Pi = [-12; 12]$.

¹ En toute rigueur, si le temps intervient dans le problème, il est alors traité comme un paramètre.

² Sur cette partie, d'une façon générale, le lecteur peut approfondir les notions abordées dans l'ouvrage de Simon et Blume (1997).

Définition 1.2. (Dérivée). La dérivée d'une fonction f , notée f' , est définie par :

$$f' : x \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Par suite, la dérivée seconde de f est notée f'' et correspond à la dérivée de f' . En économie et gestion, il est fréquent d'avoir à travailler sur des fonctions de classe C^2 .

Définition 1.3. (Continuité d'ordre 2). Une fonction f de classe C^2 est telle que f' et f'' existent et que f'' est continue.

Ce type de fonction a la propriété d'être continue et lisse ainsi que sa dérivée première. Elle est dite deux fois continûment différentiable. Formellement, cela implique que les limites à gauche et à droite sont égales quel que soit x_0 appartenant à \mathcal{E} . On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$$

Par la suite, on considérera des fonctions satisfaisant cette propriété.

Présentons le théorème suivant sur l'allure des fonctions d'une variable (voir annexe D.1).

Théorème 1.1 (Allure fonction 1). Sur un intervalle $[\underline{x}, \bar{x}] \subset \mathcal{E}$, la fonction f est

- (i) croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$,
- (ii) concave si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in]\underline{x}, \bar{x}[$.

Quelles interprétations peut-on en tirer pour l'économie et la gestion ?

La fonction. Comme esquissé dans l'introduction, les agents économiques poursuivent des objectifs qu'ils essaient de satisfaire au mieux en prenant des décisions appropriées. En économie et en gestion, la fonction a pour but de matérialiser de tels objectifs. La variable (i.e. : l'argument de la fonction) représente la décision à disposition de l'agent. Les fonctions permettent également de concrétiser l'idée de rareté des ressources. Il est d'usage dans l'optimisation de nommer fonction objectif le but poursuivi par l'agent et contrainte la rareté qu'il rencontre.

Le cas du producteur : Dans le cas du producteur, l'objectif est mesuré par la fonction de profit, c'est-à-dire le gain que celui-ci retire de son activité de production. Pour estimer son profit, il est nécessaire de construire les fonctions de recette totale et de coût total. Son choix se matérialise par son volume de production. Au final, la fonction objectif du producteur se note, d'une façon générale, $\pi(q)$.

Les dérivées. La dérivée indique le taux de variation de la fonction en son argument. Ainsi, la notion de fonction s'assimilant à l'objectif poursuivi par un agent, la dérivée représente la façon dont varie cet objectif suite à une modification (à la hausse)

de sa décision. Par définition, ce changement est infinitésimal, de sorte qu'il est qualifié de marginal. La dérivée première est à la base du calcul marginaliste et représente l'objectif marginal. Elle est à l'origine de la quasi-totalité des interprétations des résultats de l'optimisation. En effet, le signe de la dérivée d'une fonction indiquant la façon dont évolue la fonction, si l'objectif marginal est positif, une modification de la décision de l'agent lui assure d'accroître son objectif. Dans le cas inverse, un changement marginal de son choix provoque une baisse de l'objectif.

La dérivée seconde de l'objectif décrit l'évolution de l'objectif marginal (et donc l'accélération de l'objectif). Si elle est négative, l'objectif marginal est décroissant et l'objectif est concave. Dans le cas contraire, l'objectif marginal devient croissant et l'objectif convexe. Il n'y a pas d'interprétation particulière à en tirer. En revanche, on verra qu'il est important dans l'optimisation que le signe de la dérivée seconde ne change pas, c'est-à-dire que l'objectif marginal varie toujours dans le même sens ou encore que l'objectif soit concave ou convexe.

Le cas du producteur : Considérons la fonction de profit $\pi(q)$. La dérivée du profit, $\pi'(q)$, mesure la variation de profit qui résulte de l'accroissement marginal de la production et représente le profit marginal.

Le calcul marginaliste permet au producteur de mesurer l'influence de variations infinitésimales de la production sur le profit et donc les variations de la fonction de profit. Lorsque la variation est positive, le profit présente une dérivée positive $\pi'(q) \geq 0$. On dit que le profit marginal est positif. Puisque le but est de rendre maximum le profit, le calcul marginaliste prescrit alors un accroissement de la variable de décision, c'est-à-dire la quantité. En revanche, si le profit marginal est négatif (dérivée négative $\pi'(q) \leq 0$), la prescription est inversée.

Le signe de la dérivée seconde du profit, $\pi''(q)$, va informer le producteur sur la façon dont évolue son profit marginal : positivement si $\pi''(q) > 0$, négativement sinon.

Exemple : Calculons les dérivées du profit π_e , on obtient : $\pi'_e(q) = 12 - 3q$ et $\pi''_e(q) = -3$. L'intervalle sur lequel le profit est croissant est déterminé par $\pi'_e(q) = 12 - 3q \geq 0$, soit $q \leq 4$, et celui où il est décroissant par $\pi'_e(q) = 12 - 3q \leq 0$, soit $q \geq 4$. Plus précisément, si le profit marginal est non négatif ($\pi'_e(q) \geq 0$), augmenter la production accroît le profit, sinon produire plus va réduire le profit. On pourrait aussi résumer ces observations dans un tableau de variations.

La fonction π_e est concave puisque $\pi''_e(q) = -3 < 0$. Le profit marginal est donc décroissant.

Enfin, comme on a pu calculer la dérivée seconde de π_e il s'agit d'une fonction de classe C^2 .

1.1.2 Fonction de deux variables

Définition 1.4. (Fonction 2). Une fonction de deux variables est une application d'un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ dans un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$. On la note :

$$f : (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2)$$

Le cas du producteur : Lorsque le profit dépend de la quantité fabriquée de deux biens, la fonction de profit se note $\pi(q_1, q_2)$ et indique le bénéfice perçu par le producteur lorsqu'il fabrique le bien 1 en quantité q_1 et le bien 2 en quantité q_2 .

Exemple : Par la suite, on considérera la fonction de profit

$$\pi_a : (q_1, q_2) \rightarrow -\frac{1}{2}q_1^2 + q_1(q_2 + 2) - \frac{3}{2}q_2^2$$

associant à chaque couple de quantité des biens 1 et 2, (q_1, q_2) , le profit $\pi_a(q_1, q_2)$. Ainsi, si la production est le couple $(1, 1)$, le profit réalisé est $\pi_a(1, 1) = 1$.

On note la dérivée partielle de f par rapport à la variable $x_i, i = 1, 2$: $f'_{x_i}(x_1, x_2)$ et la dérivée partielle seconde de f par rapport à la variable x_i , puis $x_j, i, j = 1, 2$: $f''_{x_j x_i}(x_1, x_2)$. Lorsque $i \neq j$, cette dernière est la dérivée seconde croisée. La dérivée partielle se définit de manière analogue à la dérivée première tout en gardant à l'esprit que seule la variable considérée varie.

L'allure d'une fonction de deux variables est décrite dans le théorème suivant (voir annexe D.1).

Théorème 1.2 (Allure fonction 2). *La fonction f est*

(i) *croissante par rapport à la variable $x_i, i = 1, 2$ si et seulement si :*

$$f'_{x_i}(x_1, x_2) \geq 0$$

(ii) *globalement croissante si et seulement si*

$$df(x_1, x_2) = f'_{x_1}(x_1, x_2)dx_1 + f'_{x_2}(x_1, x_2)dx_2 \geq 0$$

(iii) *concave si et seulement si :*

$$f''_{x_1 x_1}(x_1, x_2) \leq 0 \quad f''_{x_2 x_2}(x_1, x_2) \leq 0$$

$$\text{et } f''_{x_1 x_1}(x_1, x_2)f''_{x_2 x_2}(x_1, x_2) - f''_{x_2 x_1}(x_1, x_2)f''_{x_1 x_2}(x_1, x_2) \geq 0$$

Interprétations. Lorsqu'un agent peut influencer son objectif à l'aide de deux catégories de décision, les dérivées partielles de l'objectif représentent les objectifs marginaux. Les principes du calcul marginal restent valables et les interprétations évoquées pour une variable se retrouvent. Si l'objectif marginal est positif, la modification de la décision associée entraîne une hausse de l'objectif tandis que s'il est de signe négatif, l'effet sur l'objectif sera inversé.

Lorsque l'objectif dépend de deux décisions, la différentielle de la fonction est un outil utilisant les dérivées partielles qui permet d'obtenir une valeur approchée du sens dans lequel évolue l'objectif pour des variations marginales simultanées de x_1 et x_2 . Si la différentielle est positive l'objectif s'accroît pour des hausses concomitantes et infinitésimales de x_1 et x_2 .

Quant à la concavité de l'objectif, cela signifie qu'il présente une décroissance marginale globale. Ce qui constitue la généralisation de l'idée exposée dans le cas à une décision.

Le cas du producteur : Pour le producteur, les dérivées partielles de son objectif indiquent les profits marginaux. Plus précisément, $\pi'_{q_i}(q_1, q_2), i=1, 2$, est le profit marginal associé au bien i et mesure de combien le profit varie lorsque le producteur décide d'augmenter à la marge la production du bien i . Si le producteur accroît marginalement et simultanément les quantités de bien 1 et 2, l'effet global sur son profit est donné par la différentielle. La décroissance marginale globale du profit est assurée par la concavité de $\pi(q_1, q_2)$.

Exemple : Afin de déterminer une partie des intervalles sur lesquels le profit du producteur est croissant avec les quantités qu'il fabrique, calculons les dérivées partielles. On obtient :

$$\begin{aligned}\pi'_{a_{q_1}}(q_1, q_2) &= -q_1 + q_2 + 2 \\ \pi'_{a_{q_2}}(q_1, q_2) &= q_1 - 3q_2\end{aligned}$$

Supposons alors qu'il produit deux unités de bien 2. Le profit est croissant avec la quantité fabriquée de bien 1 si $\pi'_{a_{q_1}}(q_1, 2) \geq 0$, ce qui est équivalent à $q_1 \leq 4$. Donc, lorsque $q_2 = 2$, le profit π_a est croissant avec le bien 1 si la quantité produite ne dépasse pas 4 unités. De même, si $q_1 = 1$, on montre que le profit est croissant avec la production du bien 2 si $q_2 \leq \frac{1}{3}$.

Supposons maintenant que le producteur fabrique $q_1 = 1$ et $q_2 = \frac{1}{2}$. Il souhaite savoir comment évolue son profit s'il augmente sa production de 1%. En utilisant la différentielle, on a

$$d\pi_a(q_1, q_2) = (-q_1 + q_2 + 2)dq_1 + (q_1 - 3q_2)dq_2$$

Comme $\pi'_{a_{q_1}}(1, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ et $\pi'_{a_{q_2}}(1, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, l'évolution globale du profit est mesurée par :

$$d\pi_a(q_1, q_2) = \frac{3}{2} \times 1\% + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1\% = 1\%$$

Le profit s'accroît ainsi de 1% suite à la décision d'augmenter la production de chaque bien de 1%.

Calculons les dérivées secondes du profit π_a . On a : $\pi''_{a_{q_1 q_1}}(q_1, q_2) = -1$, $\pi''_{a_{q_2 q_2}}(q_1, q_2) = -3$, $\pi''_{a_{q_1 q_2}}(q_1, q_2) = 1$ et $\pi''_{a_{q_2 q_1}}(q_1, q_2) = 1$. On obtient que cette fonction est concave, puisque :

$$\pi''_{a_{q_1 q_1}}(q_1, q_2)\pi''_{a_{q_2 q_2}}(q_1, q_2) - \pi''_{a_{q_2 q_1}}(q_1, q_2)\pi''_{a_{q_1 q_2}}(q_1, q_2) = 2 > 0$$

Remarque : La convexité d'une fonction d'une variable se traduit par $f''(x) \geq 0$, et celle d'une fonction de deux variables par $f''_{x_1 x_1}(x_1, x_2) \geq 0$ et $f''_{x_1 x_1}(x_1, x_2)f''_{x_2 x_2}(x_1, x_2) - f''_{x_2 x_1}(x_1, x_2)f''_{x_1 x_2}(x_1, x_2) \geq 0$.

1.2 NOTION DE MAXIMUM

Cette notion concerne l'ensemble des fonctions mais n'est présentée que pour une variable car elle se généralise très simplement à deux. Pour cela, il est nécessaire d'exposer quelques concepts sur les ensembles.

Considérons un ensemble \mathcal{F} inclus dans \mathbb{R} et composé d'éléments f .

Définition 1.5. (Majorant). *Un majorant de \mathcal{F} est un élément $M \in \mathbb{R}$ tel que tous les éléments $f \in \mathcal{F}$ sont inférieurs à M .*

Il existe donc plusieurs majorants. Portons notre attention sur l'un d'entre eux, le maximum.

Définition 1.6. (Maximum d'un ensemble). On dit que f^* est le maximum de \mathcal{F} si $f^* \geq f$, quel que soit $f \in \mathcal{F}$.

Ainsi le maximum f^* est le plus petit des majorants de l'ensemble \mathcal{F} . La différence fondamentale entre le majorant et le maximum est que le maximum est l'unique majorant qui appartient à \mathcal{F} , alors que tous les autres majorants n'en font nécessairement pas partie.

Exemple : Reprenons l'ensemble $\Pi = [-12; 12]$ associé aux valeurs que prend le profit π_e . Cet ensemble est inclus dans \mathbb{R} . L'un des majorants est alors donné par 14 car tous les éléments de Π sont strictement inférieurs à 14. Un autre majorant est, par exemple, 142. Si l'on s'intéresse maintenant au maximum π^* , c'est-à-dire au plus petit des majorants, on obtient 12 puisque tous les éléments de Π sont inférieurs ou égaux à 12. Le maximum est donc le seul majorant faisant partie de l'ensemble Π .

Revenons aux fonctions. Considérons que f est un élément de l'ensemble des images de la fonction $f(x)$ pour x appartenant à \mathcal{E} . On peut définir

Définition 1.7. (Maximum d'une fonction). On dit que f atteint son maximum $f^* = f(x^*)$ si $f(x^*) \geq f(x)$ pour x appartenant à \mathcal{E} .

Alors la valeur x^* est appelée argument maximum (ou maximande) de $f(x)$ dans \mathcal{E} . On le note :

$$x^* \in \arg \max_{x \in \mathcal{E}} f(x)$$

Par abus de langage on dit que x^* est un maximum de $f(x)$.

Exemple : Comme le profit dépend de la quantité produite q , on a $\pi^* = \pi(q^*)$, c'est-à-dire, le profit maximum est atteint pour $q^* = 4$. On peut donc noter : $4 \in \arg \max_{q \in \mathcal{Q}} \pi_e(q)$, ce qui signifie que 4 est le maximum de $\pi_e(q)$.

Remarque : De façon analogue, on peut définir le minimum d'une fonction. En sachant qu'un minorant de \mathcal{F} est un élément $m \in \mathbb{R}$ tel que tous les éléments $f \in \mathcal{F}$ sont supérieurs à m , le minimum se définit comme le plus grand des minorants. Par la suite, seuls les problèmes de maximisation seront étudiés. D'une part pour simplifier l'exposé et d'autre part car il est aisé de montrer que la recherche du minimum d'une fonction f revient à trouver le maximum de son opposée $-f$.

1.3 OPTIMISATION LIBRE

Commençons par étudier la situation où il n'existe pas de contrainte sur les variables de décision. Dans ce cas, l'allure de la fonction suffit à déterminer les conditions qui conduisent au maximum recherché.

1.3.1 Une variable de décision

Considérons une fonction f dont l'argument est la variable x appartenant à l'ensemble \mathcal{E} inclus dans \mathbb{R} . Le problème libre, noté Ps_1 , consistant à trouver la valeur de x qui rend maximale la fonction objectif f s'écrit :

$$\max_x f(x)$$

Pour déterminer la solution du problème Ps_1 , on dispose du théorème suivant (voir annexe D.2) :

Théorème 1.3 (Optimisation libre 1). *La solution du problème Ps_1 , notée x^* , est donnée par les deux conditions suivantes :*

$$(i) \quad f'(x^*) = 0$$

$$(ii) \quad f''(x^*) \leq 0$$

La première condition de ce théorème indique que la dérivée de la fonction doit être nulle lorsque le maximum est atteint, la seconde que cette dérivée est décroissante (et donc la dérivée seconde négative). Expliquons pourquoi la première condition est une nécessaire alors que la seconde est une condition suffisante. On parle aussi de condition du premier ordre et du second ordre.

A. Condition nécessaire et suffisante

La première condition signifie que lorsqu'un maximum est atteint pour la fonction f , celle-ci doit nécessairement s'arrêter de croître autour de x^* . Précisons cette idée. Si x^* est un maximum, f atteint sa valeur la plus élevée en ce point. Alors, pour des valeurs voisines de x^* :

- si $x < x^*$, cela implique $f(x) \leq f(x^*)$, ce qui signifie que f est croissante ;
- si $x > x^*$ implique $f(x) \leq f(x^*)$, ce qui traduit la décroissance de f .

Or, f croissante nécessite :

$$f'(x) \geq 0 \tag{1.1}$$

tandis que f décroissante requiert

$$f'(x) \leq 0 \tag{1.2}$$

Comme f est de classe C^2 , f' est continue et dérivable en x^* . Cela implique :

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x^*} f'(x) = f'(x^*)$$

Or, en vertu du signe de f' associé à (1.1) et (1.2), la première limite est positive ou nulle et la seconde négative ou nulle. Par conséquent, la seule façon de satisfaire cette égalité est bien que $f'(x^*) = 0$.

La première condition du théorème constitue donc une condition nécessaire pour trouver un maximum. Mais elle n'est pas suffisante car, pour l'instant, rien ne garantit que la dérivée est bien positive avant x^* et négative après. Comme le montre la figure 1.1, la dérivée de f s'annule aussi en x_1 , mais la dérivée est négative puis positive. Il faut donc une condition supplémentaire (suffisante) qui assure que la dérivée décroît autour de x^* . Pour cela, il suffit que $f''(x^*) \leq 0$, c'est-à-dire que f soit concave au voisinage de x^* .

Poursuivons avec la figure 1.1, en remarquant que x_2 donne une valeur à f supérieure à $f(x^*)$. La valeur x_2 est en réalité le maximum de la fonction f alors que la dérivée en ce point n'est pas égale à 0. En fait les conditions nécessaires et suffisantes du théorème assurent que x^* est un maximum local.

Comment s'assurer que x^* est aussi un maximum global ? Il suffit que f soit une fonction concave pour tout x , soit $f''(x) \leq 0$. Cela assure que la courbure de f ne s'inverse jamais. On évite ainsi que f ne soit décroissante puis croissante pour des valeurs inférieures à x^* , et/ou décroissante puis croissante pour des valeurs supérieures. Dans la figure 1.1, cette condition aurait pour conséquence que f ne comprendrait pas la partie comprise entre x_0 et x_2 , pour laquelle $f''(x) > 0$.

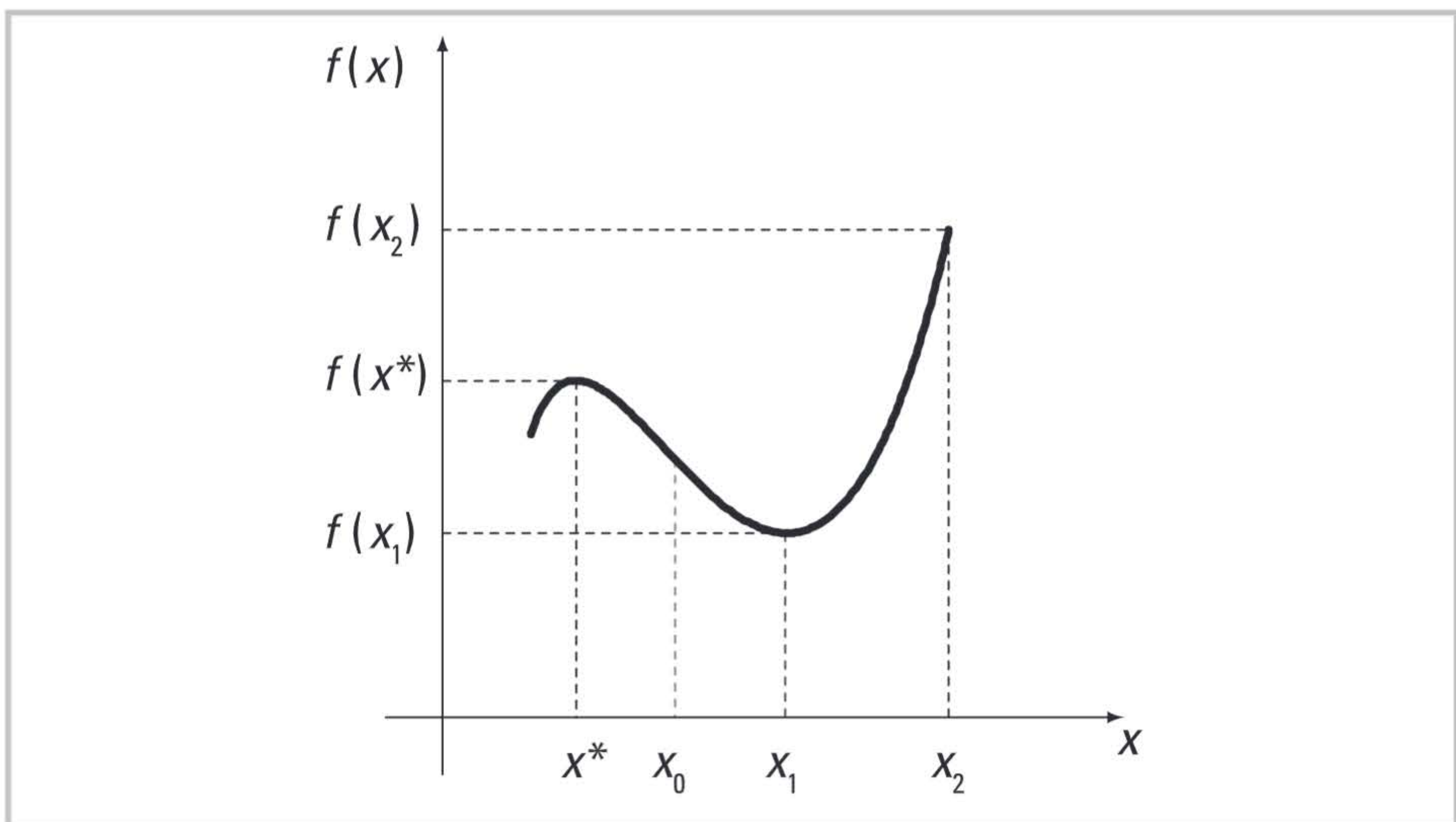


FIGURE 1.1

x^* est un maximum local

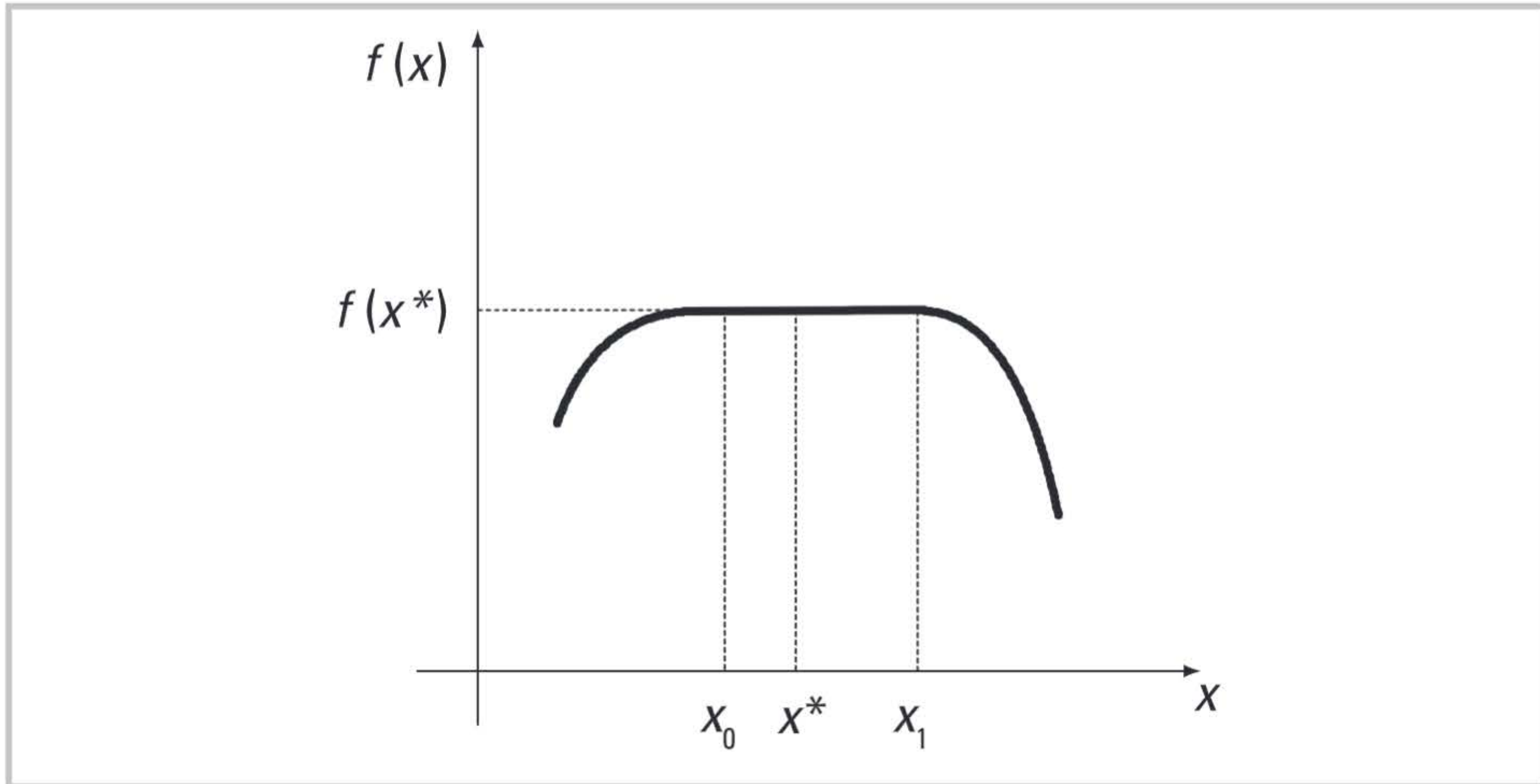


FIGURE 1.2

x^* n'est pas un maximum unique

Enfin, précisons que l'existence de ce maximum global ne permet pas de conclure qu'il est unique. La figure 1.2 étudie cet aspect.

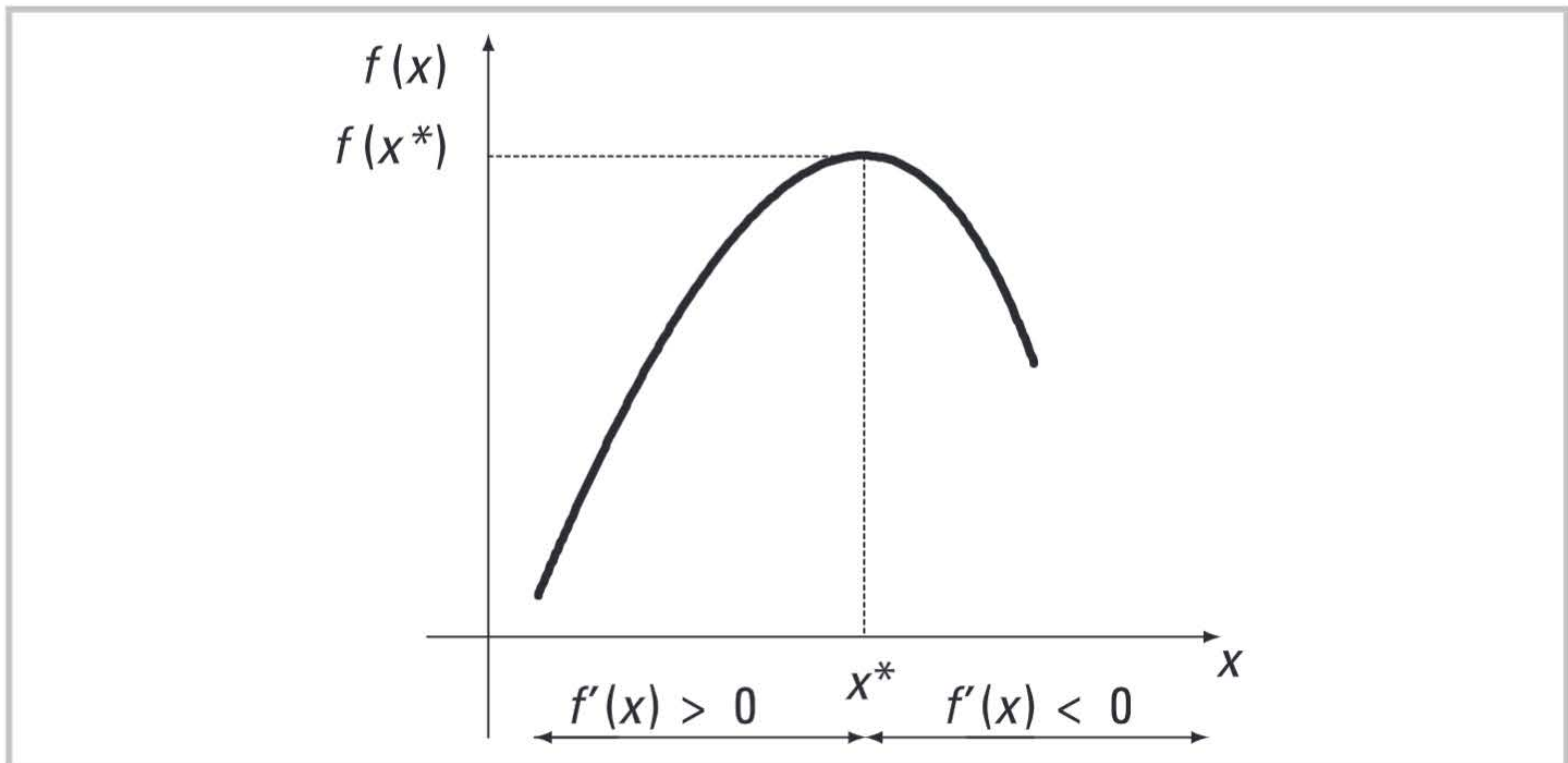
La dérivée en x^* est nulle, f est concave ce qui fait que $f(x^*)$ est bien la valeur maximale de f . Toutefois, les points x_0 et x_1 permettent aussi d'atteindre le maximum. En effet, comme la condition suffisante du théorème est $f''(x) \leq 0$, la fonction f peut être constante sur certains intervalles. La situation représentée est celle où elle l'est précisément autour de x^* . Dit autrement, il existe plusieurs valeurs de x remplissant la condition nécessaire $f'(x) = 0$. Pour que x^* soit unique il faut que la fonction f ne puisse pas être constante. Mathématiquement, cela requiert la condition $f''(x) < 0$. On arrive alors à la condition d'unicité telle que x^* est un maximum global unique si la fonction f est strictement concave.

La figure 1.3 permet de visualiser la solution en identifiant les liens entre le maximum de f et le signe de sa dérivée.

Remarque : Que se passe-t-il si la fonction f est convexe ($f''(x) \geq 0$) ? Notons x^{**} la valeur de x obtenue à l'aide de la condition nécessaire

$$f'(x) = 0 \quad (1.3)$$

En suivant un raisonnement analogue au précédent, $f''(x) \geq 0$ implique que la dérivée de f est croissante. Comme elle est nulle en x^{**} , cela veut dire qu'elle est négative avant ce point et positive après. En définitive, la fonction f est décroissante avant x^{**} et croissante après. Le point x^{**} correspond donc à un minimum.

**FIGURE 1.3**

Maximum et signe de la dérivée

Résolution : Pour déterminer la solution du problème Ps_1 , il faut utiliser la condition nécessaire, $f'(x^*) = 0$, qui définit une équation à une inconnue devant être résolue. Il est donc utile de connaître les procédures arithmétiques de résolution d'équations (par exemple linéaires ou polynomiales) ou de savoir utiliser les théorèmes garantissant l'existence d'une solution à cette équation, comme les théorèmes des valeurs intermédiaires ou du point fixe (voir annexe C.1). Il est aussi possible de rechercher numériquement la solution aux moyens d'algorithmes de recherche des zéros de fonctions comme la méthode de Newton.

B. Interprétation des conditions nécessaires et suffisantes

Les conditions nécessaires et suffisantes s'offrent à une interprétation par le calcul marginaliste. La condition nécessaire indique que la décision optimale est atteinte lorsque l'objectif marginal s'annule. En effet, on a montré que si l'objectif marginal est positif, alors accroître à la marge la décision, a pour conséquence d'augmenter l'objectif. Autrement dit, dans un souci de rendre l'objectif maximum, il faut prendre une décision d'un niveau plus important. En revanche, si l'objectif marginal est négatif, l'effet inverse a lieu. Il faut donc renoncer à augmenter le niveau de la décision. Puisque l'objectif marginal positif (resp. négatif) traduit une situation profitable (resp. non profitable), il faut continuer à accroître le niveau de la décision jusqu'à ce que l'objectif marginal s'annule. La condition suffisante indique que le raisonnement précédent est pertinent si l'objectif marginal est décroissant.

Le cas du producteur : La quantité unique q^* maximisant le profit doit vérifier :

$$\pi'(q^*) = 0 \text{ et } \pi''(q^*) \leq 0$$

Il faut donc que le profit marginal s'annule et qu'il soit décroissant. Avant q^* le profit marginal $\pi'(q)$ est positif, ce qui veut dire que lorsque le producteur augmente à la marge sa production, son profit s'accroît. En revanche, au-delà de q^* le profit marginal est négatif : augmenter la production a pour conséquence de réduire le profit. Le producteur doit donc produire jusqu'au point où accroître sa production n'augmente plus son profit. Cela survient lorsque le profit marginal est nul.

Poursuivons le raisonnement en se rappelant que le profit marginal est la différence entre la recette marginale et le coût marginal. Le producteur a donc intérêt à accroître sa production quand la recette marginale est supérieure au coût marginal et à s'arrêter sur la quantité qui va égaliser la première à la seconde.

Exemple : Revenons à $\pi_e(q) = 12q - \frac{3}{2}q^2 - 12$. La condition nécessaire est : $\pi'_e(q^*) = 12 - 3q^* = 0 \Leftrightarrow q^* = 4$. Ce qui donne un profit de $\pi_e(4) = 12$. Par l'utilisation du théorème, on retrouve la quantité optimale obtenue graphiquement dans l'introduction du manuel. Est-ce que cette condition est suffisante ? La réponse est oui puisque $\pi''_e(q) = -3 < 0$, ce qui veut dire que la fonction est strictement concave.

1.3.2 Deux variables de décision

Étudions maintenant le problème consistant à maximiser une fonction dépendant de deux variables. Considérons une fonction f définie sur $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ dont les arguments sont les variables x_1 et x_2 . Le problème libre Ps_2 s'écrit :

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$$

On distingue les résolutions algébriques et graphiques.

A. Résolution algébrique

On obtient le théorème suivant (voir annexe D.2).

Théorème 1.4 (Optimisation libre 2). *La solution du problème Ps_2 , notée (x_1^*, x_2^*) , est donnée par les deux conditions suivantes :*

$$f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) = f'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\text{et } \begin{cases} f''_{x_1 x_1}(x_1^*, x_2^*) \leq 0, f''_{x_2 x_2}(x_1^*, x_2^*) \leq 0 \\ f''_{x_1 x_1}(x_1^*, x_2^*)f''_{x_2 x_2}(x_1^*, x_2^*) - f''_{x_2 x_1}(x_1^*, x_2^*)f''_{x_1 x_2}(x_1^*, x_2^*) \geq 0 \end{cases}$$

Ce théorème constitue la généralisation à deux variables du théorème 1.3. Les deux premières conditions s'interprètent de la façon suivante. Quelle que soit la valeur prise par la variable x_2 , la fonction doit être maximum pour x_1 . On a démontré que la fonction doit être croissante juste avant la valeur optimale, et décroissante juste après. Par continuité de la fonction f , le maximum est atteint quand la dérivée partielle de f

par rapport à x_1 s'annule. Ce raisonnement s'appliquant également à la variable x_2 , les conditions nécessaires à la recherche d'un maximum impliquent que les dérivées partielles de la fonction objectif par rapport à chacune des variables doivent s'annuler. Les deux dernières conditions assurent la concavité de la fonction f , c'est-à-dire la décroissance marginale globale de f . Comme pour le cas à une variable, cela constitue une condition suffisante pour que les dérivées partielles ne s'annulent qu'une seule fois. Par analogie, si la fonction est strictement concave, la solution du problème (x_1^*, x_2^*) est unique.

Résolution : Les conditions nécessaires fournissent un système de deux équations à deux inconnues. Sa résolution donne la solution du problème de maximisation. Comme pour les problèmes à une variable, il est nécessaire de posséder quelques notions sur la recherche de solution des systèmes d'équations linéaires ou non (voir annexe C.1).

Interprétation des conditions nécessaires et suffisantes. Les conditions nécessaires et suffisantes ont le même sens qu'avec une variable : l'agent doit accroître le niveau de ses décisions jusqu'à ce que la contribution de chacune annule simultanément les objectifs marginaux. Ce principe est vrai si la décroissance marginale globale de l'objectif est satisfaite.

Le cas du producteur : Le producteur doit poursuivre la production de chaque bien jusqu'à ce que les profits marginaux s'annulent. Ainsi, lorsqu'accroître la production des deux produits simultanément ne conduit plus à augmenter le profit, les niveaux optimaux sont atteints.

Exemple : Étudions le cas du producteur qui obtient le profit $\pi_a(q_1, q_2) = -\frac{1}{2}q_1^2 + q_1(q_2 + 2) - \frac{3}{2}q_2^2$. Le couple unique de quantité (q_1^*, q_2^*) maximisant le profit doit vérifier la condition nécessaire (on a déjà démontré que π_a est une fonction concave) :

$$\begin{aligned} \pi'_{a_{q_1}}(q_1^*, q_2^*) = \pi'_{a_{q_2}}(q_1^*, q_2^*) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -q_1^* + q_2^* + 2 = 0 \\ q_1^* - 3q_2^* = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La résolution de ce système donne : $q_1^* = 3$ et $q_2^* = 1$. Le profit obtenu est alors $\pi_a(3, 1) = 3$.

Remarque : La condition suffisante assurant que la fonction est concave nécessite deux conditions. Que se passe-t-il si l'une des deux n'est pas remplie ? Si la première ne l'est pas, on a $f''_{x_1 x_1}(x_1, x_2) \geq 0$. Combinée avec la seconde, on obtient forcément que $f''_{x_2 x_2}(x_1, x_2) \geq 0$, et donc que la fonction objectif f est convexe. Les conditions nécessaires débouchent sur un minimum.

Si la seconde ne l'est pas, les conditions nécessaires débouchent sur un point-col de la fonction (ou un point-selle) qui constitue un maximum pour l'une des variables et un minimum pour l'autre.

B. Résolution graphique

Si l'on traite la résolution graphique séparément, c'est parce que la solution apparaît beaucoup moins immédiatement qu'avec une seule variable. La figure 1.4 permet de saisir cette idée. En effet, les conditions du théorème assurent que la fonction f a l'allure d'un bol renversé avec un sommet unique. Du fait de la représentation en 3 dimensions, il n'est pas évident d'en déterminer avec précision le maximum.

C'est pourquoi on recourt à l'idée de courbe de niveau.

Définition 1.8. (Courbe de niveau). On appelle \mathcal{C}_k la courbe de niveau k de la fonction f , l'ensemble :

$$\mathcal{C}_k = \{(x_1, x_2) \text{ tels que } f(x_1, x_2) = k\}$$

Dit autrement, la courbe de niveau \mathcal{C}_k est composée de tous les points (x_1, x_2) qui permettent à la fonction f d'être égale à k . Algébriquement, la courbe de niveau est obtenue par application du théorème des fonctions implicites (voir annexe D.1). Il s'ensuit que la représentation graphique d'une courbe de niveau d'une fonction f se fait dans un espace à deux dimensions (une variable par axe) et non trois comme la fonction le nécessite. Graphiquement, les courbes de niveau permettent de visualiser la fonction f de la figure 1.4 par « le-dessus », soit orthogonalement au plan formé par les variables.

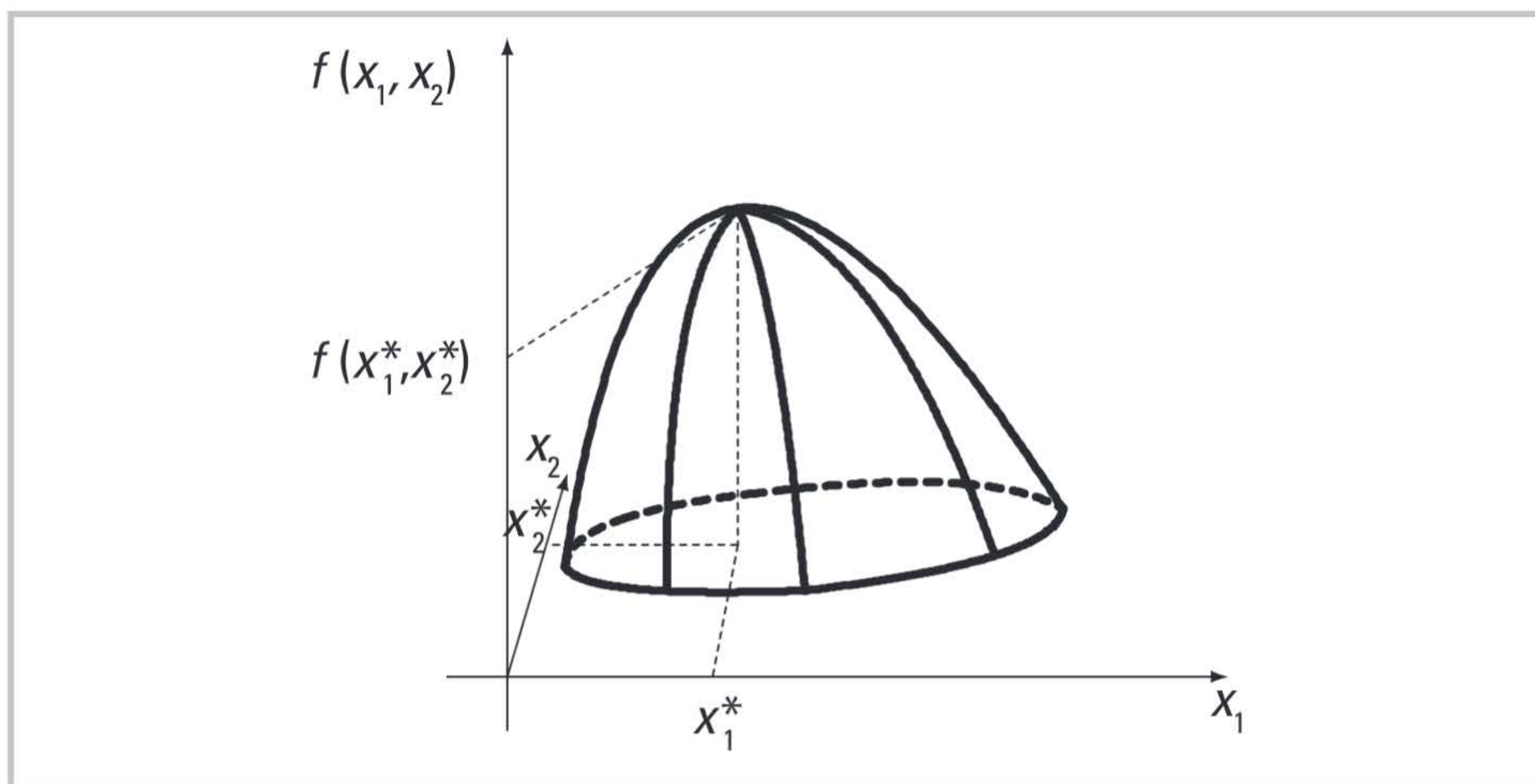
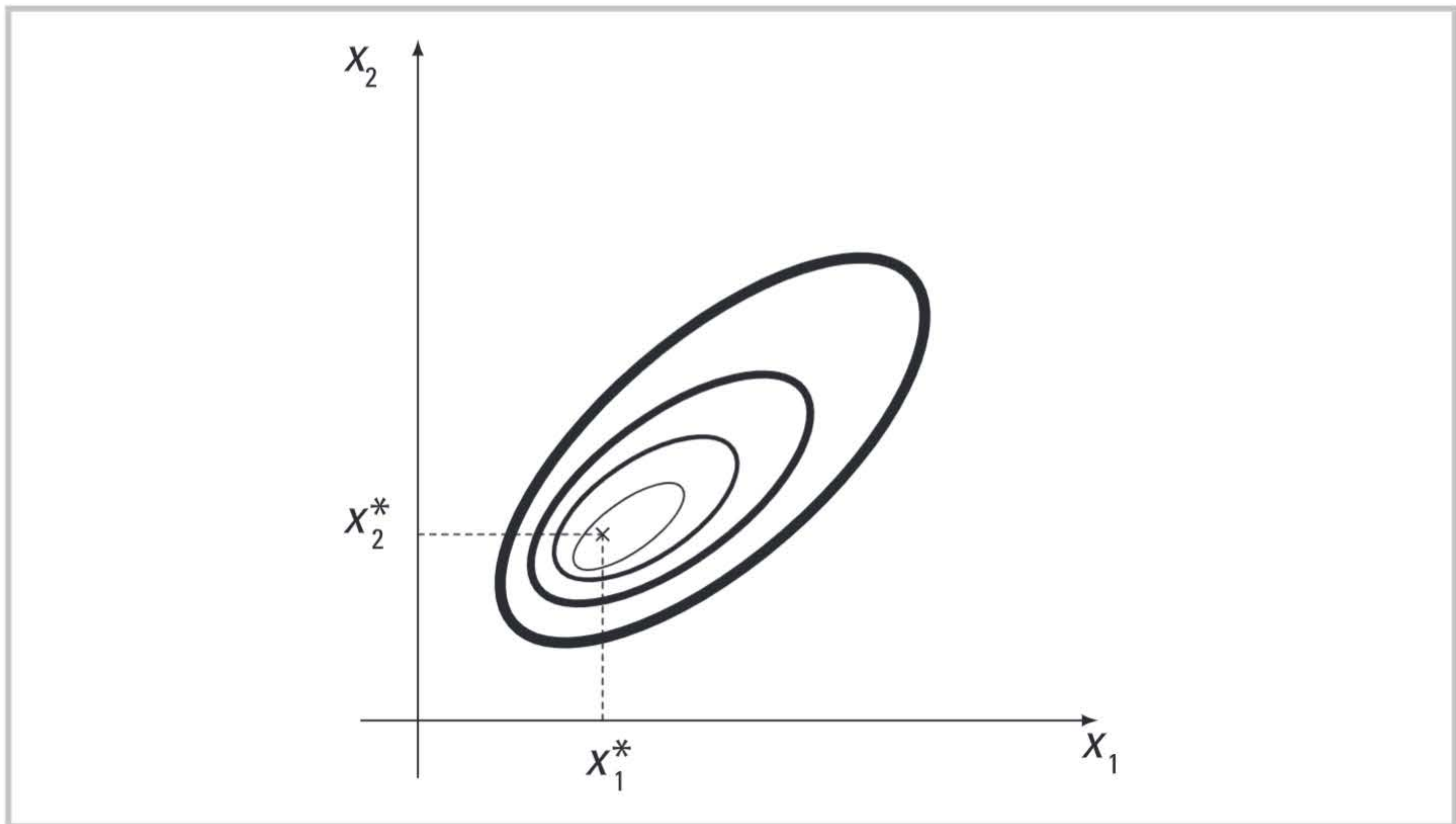


FIGURE 1.4

Fonction de deux variables : 3D

**FIGURE 1.5**

Fonction de deux variables : courbes de niveau

La figure 1.5 matérialise les courbes de niveau d'une fonction f satisfaisant les conditions du théorème : ses dérivées premières s'annulent en (x_1^*, x_2^*) et elle est concave. Compte tenu de la forme de bol inversé de la fonction f , il est aisé de remarquer que les courbes de niveau sont circulaires et que, plus la circonférence d'une courbe est réduite, plus la valeur de f qui y est associée est élevée. Ainsi, les couples de point (x_1, x_2) situés sur une courbe de niveau à trait plus épais donnent une valeur à f moindre que ceux situés sur une courbe à trait plus fin. Le sommet est atteint en (x_1^*, x_2^*) qui se concrétise par un point et non plus par une courbe.

Remarque : Comme on peut l'observer sur la figure 1.5, deux courbes de niveau ne se coupent jamais, sinon cela sous-entendrait qu'un même couple permet d'atteindre deux valeurs différentes de la fonction.

Exemple : Étudions la fonction de profit $\pi_a(q_1, q_2)$. La représentation graphique est donnée dans la figure 1.6. Examinons maintenant ses courbes de niveau dans la figure 1.7. Représentons trois courbes associées à un profit π_a de 2 (\mathcal{C}_2 en trait épais), de 2,33 ($\mathcal{C}_{2,33}$ en trait moyen) et de 2,5 ($\mathcal{C}_{2,5}$ en trait fin). De plus, matérialisons le couple de production optimal, $q_1 = 3$ et $q_2 = 1$ par une croix. On vérifie que la fonction π_a est telle que plus la circonférence des courbes de niveau est réduite, plus le profit est grand.

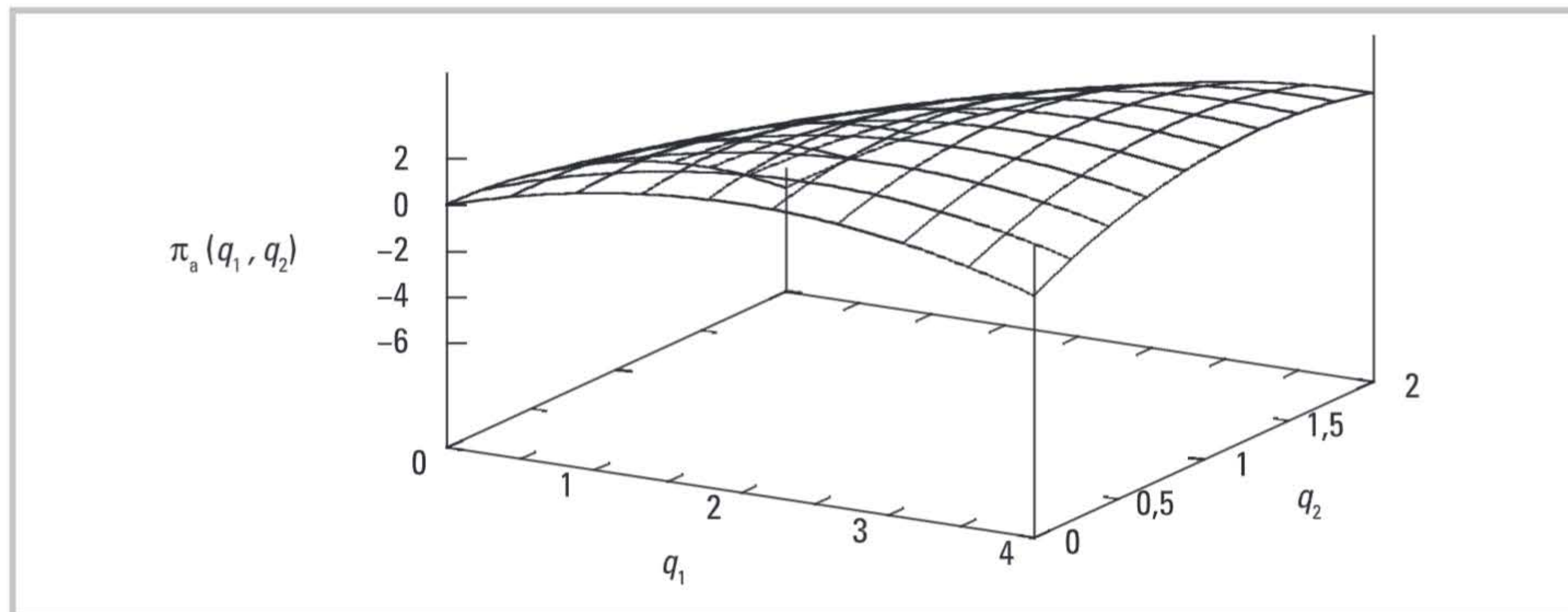


FIGURE 1.6
Profit $\pi_a(q_1, q_2)$

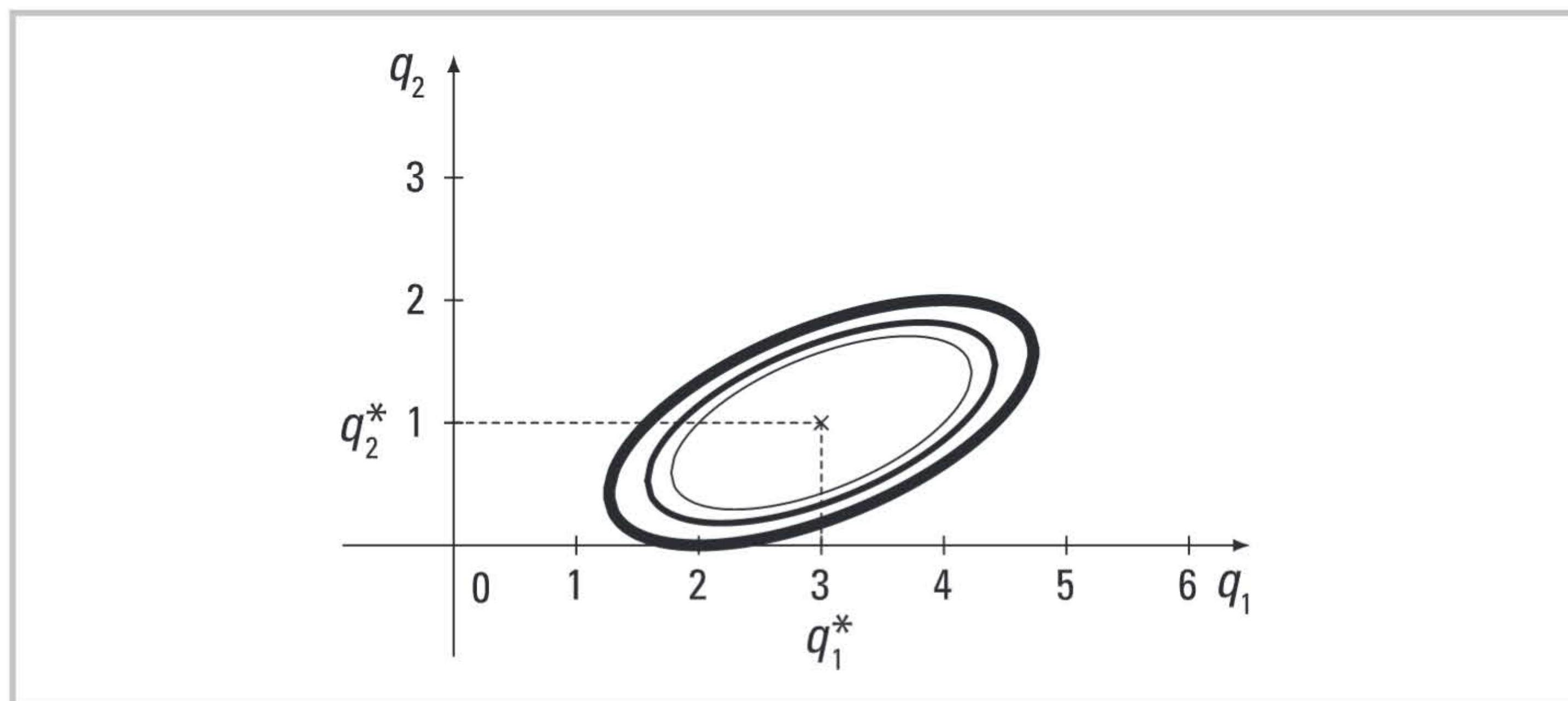


FIGURE 1.7
Courbe de niveau et maximum de $\pi_a(q_1, q_2)$

1.3.3 Les problèmes paramétriques

Il est fréquent que l'étude d'un problème se fasse avec l'intention de conserver un certain degré de généralité. Par exemple, une variable dans le problème d'optimisation peut être considérée comme hors de contrôle, et donc traitée comme exogène. Une façon d'y parvenir consiste à utiliser des fonctions paramétriques. Par définition, un paramètre est un argument de la fonction dont le niveau influence celle-ci mais sur lequel on ne peut agir contrairement à la variable de décision.

Définition 1.9. (Fonction paramétrique). Une fonction $f : (x, a) \rightarrow f(x, a)$ est dite paramétrique si :

- l'argument x est la variable de décision où $x \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}$;
- l'argument a est un paramètre où $a \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}$.

L'influence du paramètre sur la fonction f est donc mesurée à partir de la dérivée partielle de f par rapport à a , soit $f'_a(x, a)$. Une fonction de deux variables peut également être paramétrique, elle se note $f(x_1, x_2, a)$.

Exemple : Jusqu'à présent, le profit du producteur était $\pi_e(q) = 12q - \frac{3}{2}q^2 - 12$. Or, cette spécification est trop réductrice et l'analyse menée souffre d'un manque de généralité. Une façon d'y remédier consiste par exemple à considérer que le coefficient $3/2$ qui affecte $-q^2$ est une valeur particulière d'un paramètre plus général, noté $a > 0$, donnant une indication sur le niveau des coûts du producteur. Le profit devient alors une fonction paramétrique $\pi_e(q, a) = 12q - aq^2 - 12$. Comment ce paramètre de coût influence-t-il le profit ? Pour répondre, calculons la dérivée partielle de π_e par rapport à a . On a : $\pi'_e(q, a) = -q^2 < 0$. Le paramètre de coût influence donc négativement le profit.

On développe deux aspects des problèmes paramétriques mais ne les présentons que dans le cas d'une optimisation libre à une variable de décision car ils se généralisent aisément aux cas contraints et à deux variables. Le problème paramétrique Ps_3 se note :

$$\max_x f(x, a)$$

La condition nécessaire donne (cf. : théorème 1.3) :

$$f'_x(x^*, a) = 0 \quad (1.4)$$

ce qui définit le choix optimal x^* comme une fonction implicite du paramètre a (voir annexe D.1).

Remarque : Comme la fonction contient deux arguments mais une seule variable de décision, la condition nécessaire fait intervenir uniquement la dérivée partielle de f par rapport à x .

A. Statique comparative

L'exercice dit de statique comparative consiste à déterminer l'évolution de la solution d'un problème en fonction d'un paramètre. Par application du théorème des fonctions implicites (voir annexe D.1) à l'équation (1.4), on a le théorème suivant :

Théorème 1.5 (Statique comparative). Le choix optimal x^* évolue avec le paramètre a conformément à :

$$x^{*'}(a) = \frac{dx^*}{da} = -\frac{f''_{xa}(x, a)}{f''_{xx}(x, a)}$$

Mais on peut simplifier ce théorème car la condition suffisante pour avoir un maximum est $f''_{xx}(x, a) < 0$. Ainsi, $x^{**}(a)$ a le même signe que $f''_{xa}(x, a)$. En vertu du théorème sur la supermodularité (voir annexe D.1), on obtient :

Théorème 1.6 (Théorème de Topkis). *Si la fonction f est supermodulaire (resp. sous-modulaire) alors le choix optimal x^* est croissant (resp. décroissant) avec le paramètre a .*

Interprétation de la statique comparative. Par définition, la supermodularité (resp. sous-modularité) traduit l'idée que la modification d'un argument renforce (resp. atténue) l'effet sur la fonction de la modification initiale de l'autre argument. Cette notion appliquée à l'optimisation débouche sur l'interprétation suivante. Si la fonction est supermodulaire (resp. sous-modulaire), cela signifie que la décision optimale doit s'accroître (resp. diminuer) si le paramètre augmente, ce qui traduit la nature complémentaire (resp. substituable) de la décision et du paramètre dans l'objectif poursuivi.

Le cas du producteur : Supposons que, dans le profit noté $\pi(q, a)$, le paramètre a reflète une partie de l'environnement du producteur (comme l'importance de la demande ou de certains coûts). Il est possible d'analyser comment le niveau de l'environnement influence la production optimale. Si la fonction de profit est supermodulaire, c'est-à-dire, la production et le paramètre sont complémentaires (cas probable avec la demande), alors la production optimale croît avec le paramètre. Plus la demande est importante, plus la quantité optimale est grande. En revanche, elle décroît si la fonction est sous-modulaire (cas probable avec les coûts).

Exemple : Étudions la fonction de profit paramétrée par un niveau de coût $\pi_e(q, a) = 12q - aq^2 - 12$. L'analyse de statique comparative va indiquer comment le choix optimal de production évolue avec ce niveau. La condition nécessaire étant : $\pi'_{eq}(q, a) = 12 - 2aq = 0$, on a $q^*(a) = \frac{6}{a}$. On déduit que plus les coûts sont élevés, moins la production maximisant le profit est grande car $q^{**}(a) = -\frac{6}{a^2} < 0$. Ce résultat de statique comparative est immédiat si on remarque que la fonction π_e est sous-modulaire puisque $\pi''_{eqa}(q, a) = -2q < 0$.

Remarque : Le théorème de Topkis reste vrai (par analogie) si le nombre de variables passe à 2, tout en conservant un seul paramètre. Si le nombre de paramètres devient égal à 2, il faut rajouter une condition sur la fonction f , à savoir qu'elle doit être à *différences croissantes* par paire de variables et de paramètres. Cela revient à ce que $f''_{x_i a_j}(x_1, x_2, a_1, a_2) > 0$ pour tout i et j .

B. Théorème de l'enveloppe

Ce concept est en quelque sorte la suite naturelle du questionnement précédent. La statique comparative indique la façon dont la variable de décision optimale évolue avec

un paramètre. Le théorème de l'enveloppe précise comment ce paramètre influence la fonction f optimisée, c'est-à-dire évaluée en son maximum x^* .

Définition 1.10. (Fonction valeur). *La fonction valeur associée à la fonction f , notée V , est la fonction définie par :*

$$V(a) = f(x^*(a), a)$$

où $x^*(a)$, le maximum de f , est défini par (1.4)

En utilisant le théorème sur la dérivée totale (voir annexe D.1), on a que

$$V'(a) = \frac{dV}{da} = f'_x(x^*(a), a)x^{*'}(a) + f'_a(x^*(a), a)$$

Mais, en vertu de la définition de $x^*(a)$, on sait que $f'_x(x^*(a), a) = 0$, d'où le théorème :

Théorème 1.7 (Théorème de l'enveloppe). *L'évolution de la fonction valeur V en fonction du paramètre a est donnée par :*

$$V'(a) = f'_a(x^*(a), a)$$

Interprétation du théorème de l'enveloppe. Le signe de la dérivée partielle de la fonction objectif par rapport au paramètre est donc primordial. La fonction valeur va croître (resp. décroître) avec le paramètre si cette dérivée partielle est positive (resp. négative). Si le paramètre influence positivement (resp. négativement) l'objectif, alors l'objectif optimisé s'accroît (resp. décroît) avec le paramètre, c'est-à-dire, l'agent profite (resp. ne profite pas) d'une valeur plus importante du paramètre. Ainsi, seul l'effet direct du paramètre importe dans la dérivée $V'(a)$ car l'effet indirect est déjà pris en compte par le choix $x^*(a)$ dans l'optimisation.

Le cas du producteur : Pour le producteur faisant face à un profit paramétrique, la fonction valeur est $V(a) = \pi(q^*(a), a)$. L'influence de l'environnement sur le profit maximum se mesure donc à l'aide de la dérivée partielle de la fonction π par rapport à a , soit $\pi'_a(q^*(a), a)$. Si $\pi'_a(q^*(a), a)$ est positif, alors le profit maximum est croissant (cas probable avec la demande), sinon il est décroissant (cas probable avec les coûts).

Exemple : Soit la fonction de profit $\pi_e(q, a) = 12q - aq^2 - 12$. La fonction valeur est

$$V(a) = \pi_e(q^*(a), a) = 12q^*(a) - aq^*(a)^2 - 12$$

On a $V'(a) = \pi'_{e_a}(q^*(a), a) = -q^*(a)^2 < 0$. Autrement dit, plus le niveau des coûts est grand, moins le producteur obtient un profit maximum élevé.

1.4 OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE

Étudions désormais l'existence de contraintes dans les problèmes d'optimisation. Les problèmes de décision font souvent référence à la prise en compte de contraintes technologiques, économiques ou autres. L'optimisation consiste alors à intégrer ces contraintes pour atteindre le meilleur choix.

1.4.1 Une variable de décision

La présence d'une contrainte dans le problème d'optimisation signifie que le choix de x est limité. Supposons que le problème consiste toujours à maximiser la fonction f continue et concave du paragraphe 1.3.1, mais que désormais, la variable x ne peut pas dépasser une certaine valeur notée X . Cette valeur représente la quantité maximale de ressource qu'il est possible de consacrer à la décision.

Formellement, le problème contraint, noté Ps_4 , s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_x & f(x) \\ \text{s/c } & x \leq X \end{aligned}$$

où la notation s/c signifie sous contrainte. Notons la solution de ce problème x_c . Rappelons que $x^* = \arg \max_x f(x)$ est la solution du problème libre Ps_1 .

Si le seul but est de trouver la solution, celle-ci est assez évidente si l'on se réfère à l'optimisation libre. Deux cas sont à envisager :

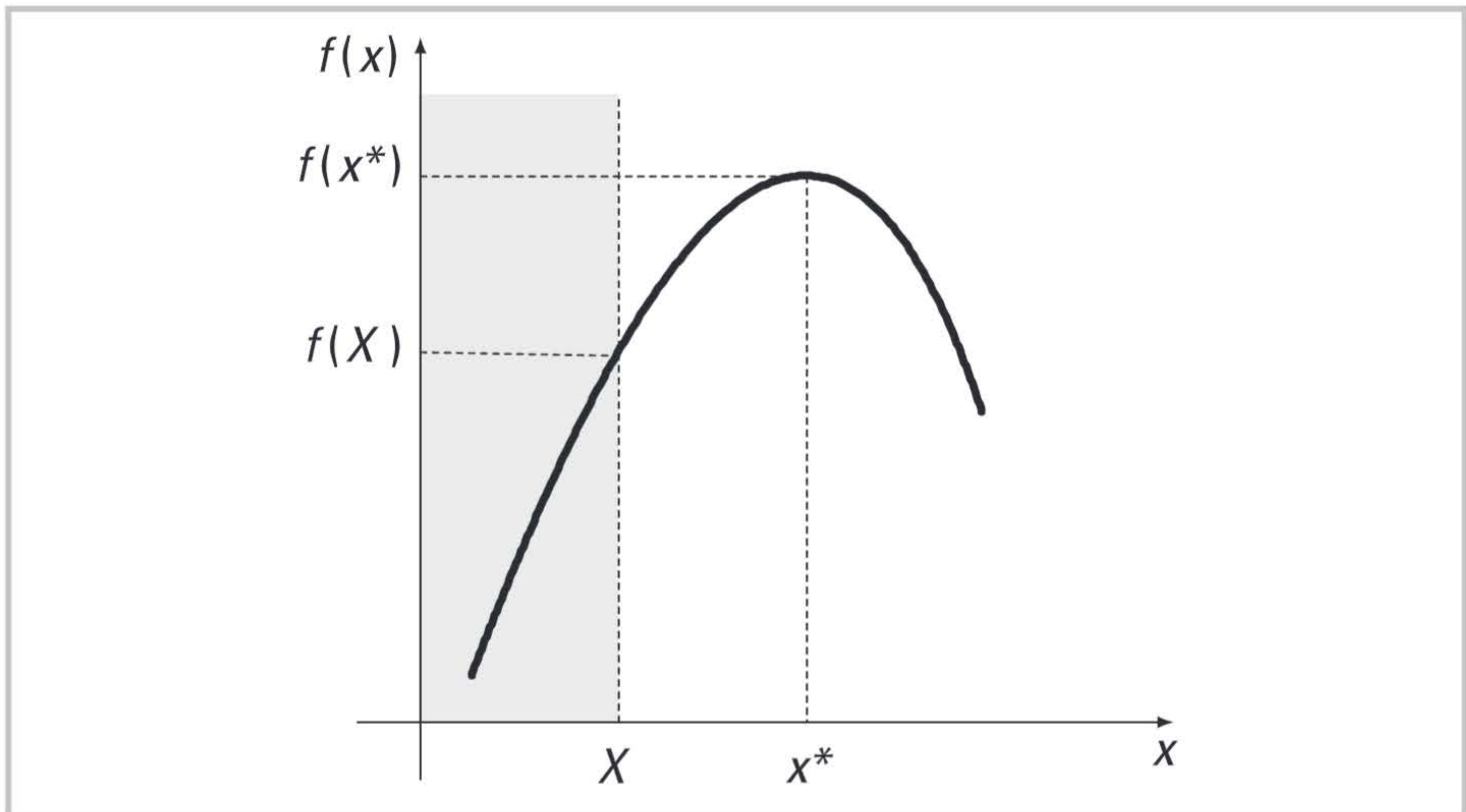
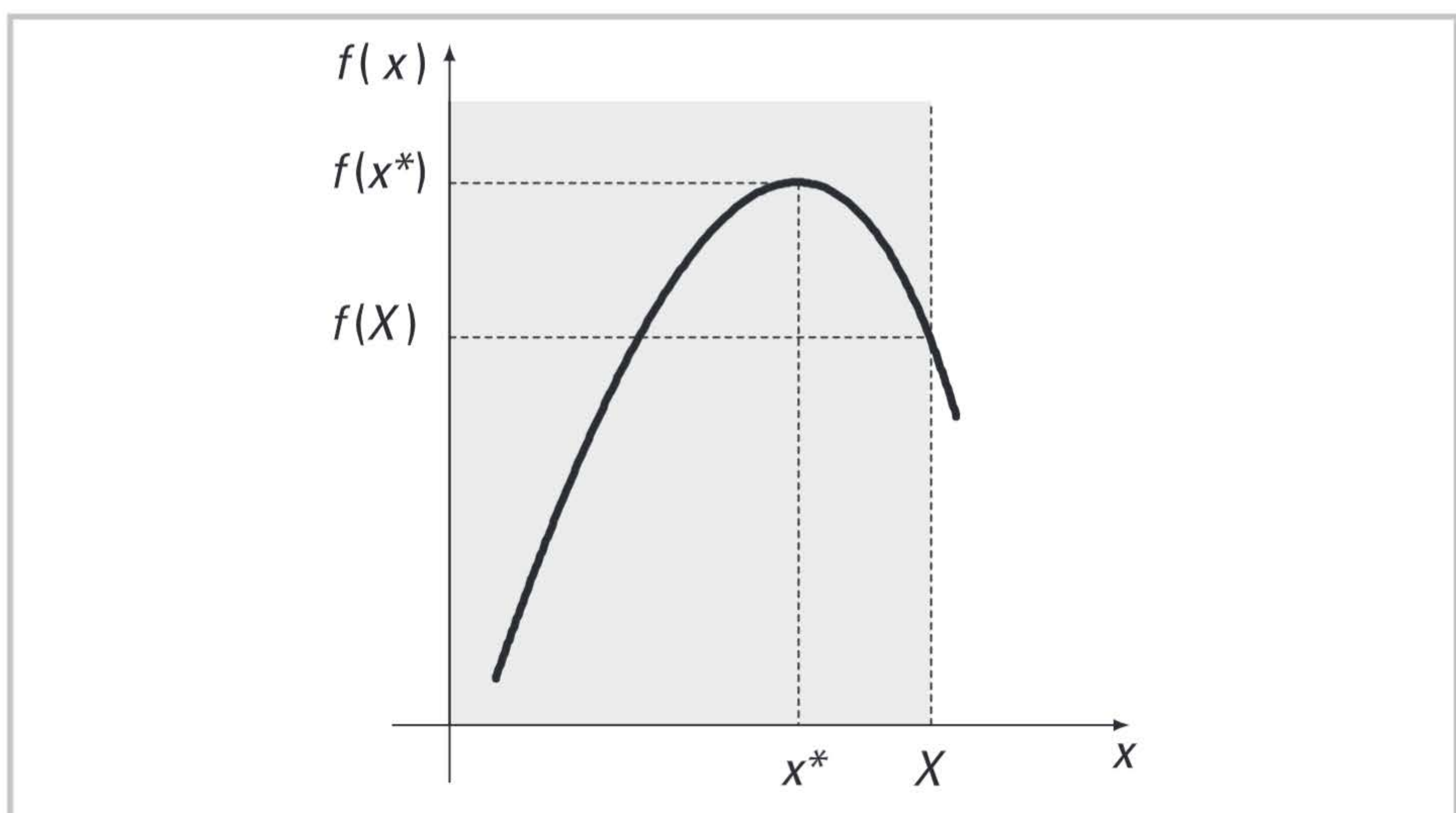
- si $X < x^*$, alors $x_c = X$
- si $X \geq x^*$ alors $x_c = x^*$

En effet reprenons la figure 1.3 et schématisons la présence d'une contrainte sur x à travers une aire grisée traduisant les valeurs accessibles pour x . Le premier cas est représenté dans la figure 1.8. Le maximum de f est en x^* , mais x^* est supérieur à X . Le mieux à faire est donc d'aller le plus loin possible dans les valeurs acceptables de x . On dit que la contrainte est saturée (ou serrée), c'est-à-dire que l'égalité $x_c = X$ doit être vérifiée.

Le second cas est illustré de la façon suivante (figure 1.9). Le maximum de f demeure en x^* , mais cette fois il est inférieur à X . Doit-on saturer la contrainte ? La réponse est non, puisque $f(X) < f(x^*)$. On dit que la contrainte est libre, c'est-à-dire que l'inégalité $x_c < X$ doit être vérifiée.

En termes économiques, on peut donc conclure qu'un agent n'est réellement contraint que lorsqu'il ne peut aller jusqu'où il souhaite.

Toutefois, l'obtention quasi-instantanée de la solution ne débouche pas sur un principe très subtil car finalement assez intuitif. Pour avancer dans ce sens, économis-

**FIGURE 1.8**Maximum quand $X < x^*$ **FIGURE 1.9**Maximum quand $X > x^*$

tes et gestionnaires ont recours à un autre mode de résolution consistant à utiliser une fonction auxiliaire appelée le lagrangien.

A. Le lagrangien

Le lagrangien associé au problème Ps_4 est une fonction auxiliaire L qui combine la fonction objectif et la contrainte. Elle se note de la façon suivante :

$$L(x, \ell, X) = f(x) + \ell(X - x)$$

Le lagrangien est une fonction dépendant de deux variables et d'un paramètre :

- x est toujours la variable de décision ;
- ℓ est une variable appelée le multiplicateur de Kuhn et Tucker associé à la contrainte réécrite sous la forme $X - x \geq 0$. Elle n'a pas la qualité de variable de décision mais n'est pas un paramètre pour autant. Elle est déterminée conjointement avec la solution du problème (elle est endogène) ;
- X a le statut d'un paramètre et mesure le niveau (ou l'intensité) de la contrainte. Lorsque X s'accroît (resp. décroît), la contrainte se relâche (resp. se resserre), c'est-à-dire devient moins (resp. plus) contraignante.

Afin de simplifier la suite de la présentation, on omettra de préciser les arguments de L chaque fois que cela ne suscite pas d'ambiguïté.

B. Recherche de la solution

Cette recherche est basée sur le théorème suivant caractérisant les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker (voir annexe D.2) :

Théorème 1.8 (Kuhn et Tucker 1). *Les conditions nécessaires du problème Ps_4 sont :*

$$L'_x = f'(x) - \ell = 0$$

$$L'_\ell = X - x \geq 0$$

$$\ell \geq 0, \ell(X - x) = 0$$

Ce théorème contient donc 3 conditions. La première est tout simplement l'application à L de la condition nécessaire sur la variable de décision : la recherche du maximum d'une fonction implique toujours que la dérivée de la fonction sur laquelle on raisonne est égale à 0 (voir le théorème 1.3 du paragraphe 1.3.1).

La deuxième condition permet de retrouver l'écriture de la contrainte.

La troisième se compose de deux points, $\ell \geq 0$ et $\ell(X - x) \geq 0$. Pourquoi le premier impose-t-il que le multiplicateur soit non négatif ? Pour répondre, supposons que la solution consiste à toujours saturer la contrainte quel que soit le niveau de X . On a alors $x_c = X$ et la première condition du théorème définit implicitement ℓ en fonction

de X , soit $\ell(X)$ tel que $f'(X) = \ell(X)$. Appliquons le théorème des fonctions implicites (voir annexe D.1) à cette expression, on obtient :

$$\ell'(X) = \frac{d\ell}{dX} = f''(X) < 0$$

Comme f est une fonction (strictement) concave ($f''(x) < 0$), le multiplicateur décroît à mesure que le niveau de X grandit, donc que la contrainte se relâche.

Une fois ce constat effectué, mettons en relation la valeur du multiplicateur ℓ avec les variations de la fonction f . Puisque $f'(x) \geq 0$ quand $x \leq x^*$, on obtient les schémas de la figure 1.10. On observe ainsi que les valeurs négatives du multiplicateur reviendraient à saturer inutilement la contrainte.

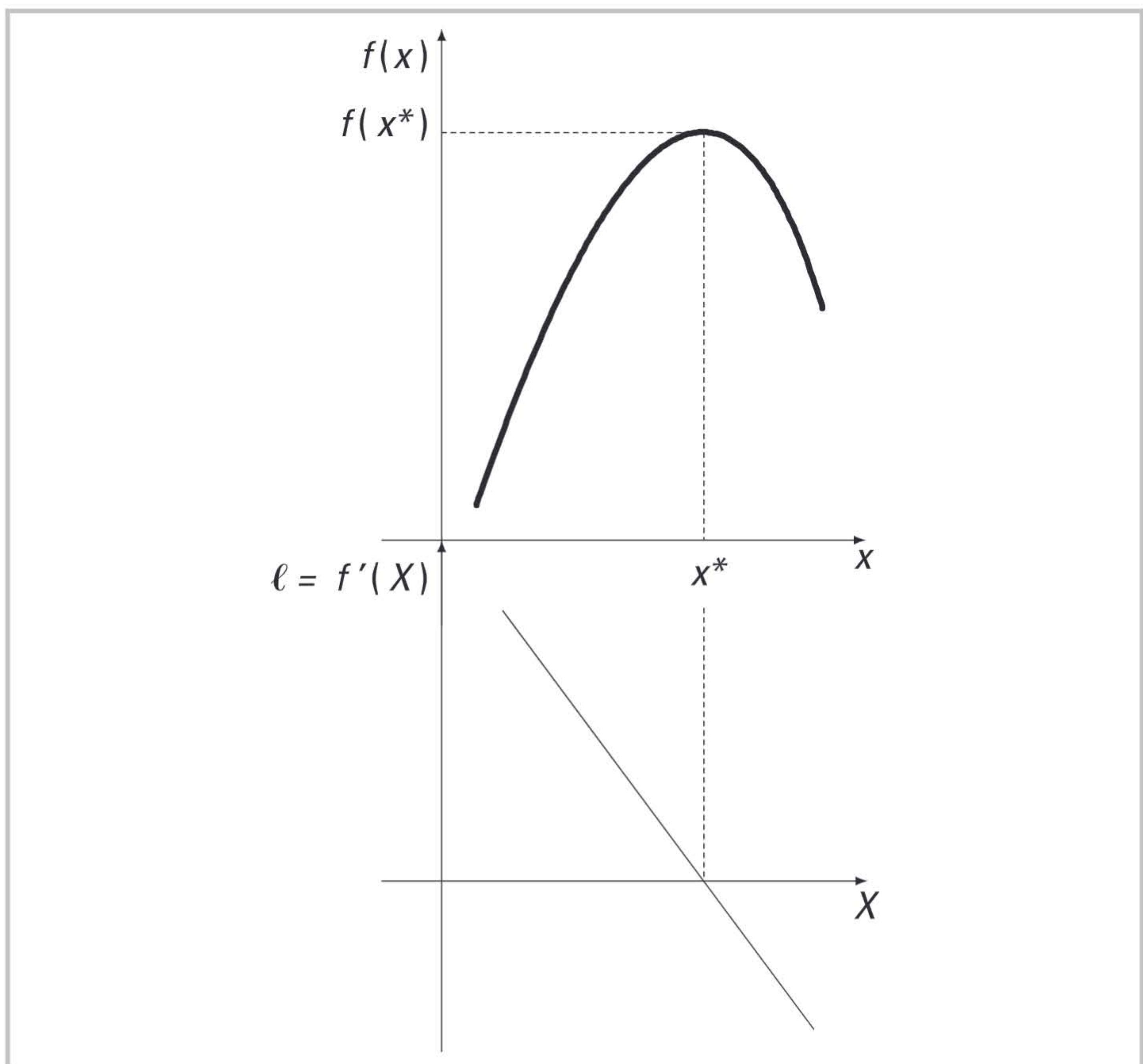


FIGURE 1.10
Signe du multiplicateur

De cette discussion découle le deuxième point de la condition 3, à savoir que le produit $\ell(X - x_c)$ est toujours nul. En effet, si $X < x^*$, alors $\ell > 0$ et $X - x_c = 0$, tandis que si $X > x^*$, alors $\ell = 0$ et $X - x_c > 0$. Puisque ce produit est toujours égal à 0, on a :

$$L = f(x_c) + \underbrace{\ell(X - x_c)}_{=0}$$

Il s'ensuit que le maximum de L correspond bien au maximum contraint de f . Les deux points de la troisième condition forment ce que l'on appelle les conditions d'exclusion.

Résolution : Les conditions nécessaires débouchent sur un système de deux équations à deux inconnues. La solution est obtenue par la résolution de ce système en envisageant que la contrainte est libre puis saturée. La solution qui entre en contradiction avec les conditions nécessaires (par exemple un multiplicateur négatif) est éliminée. Celle qui les respecte est conservée.

C. Interprétations

Le multiplicateur. Poursuivons en donnant un sens économique à ℓ . Définissons la solution du problème de la façon suivante :

$$x_c(X) = \begin{cases} x^* & \text{si } X \geq x^* \\ X & \text{si } X < x^* \end{cases}$$

puis la fonction valeur $V(X)$ associée au lagrangien, c'est-à-dire la fonction L évaluée en son maximum x_c . On obtient :

$$V(X) = L(x_c(X), \ell(X), X) = f(x_c(X)) + \ell(X)(X - x_c(X))$$

Par application du théorème de la dérivée totale (annexe D.1), on a

$$\begin{aligned} V'(X) &= (f'(x_c(X)) - \ell(X))x'_c(X) + \ell'(X)(X - x_c(X)) + \ell(X) \\ &= \ell(X) \end{aligned}$$

En effet, on a $f'(x_c(X)) - \ell(X) = 0$ par définition de x_c et $\ell'(X)(X - x_c(X)) = 0$ puisque :

- si $\ell(X) > 0$, $\ell'(X) < 0$ mais $(X - x_c(X)) = 0$;
- sinon $(X - x_c(X)) > 0$ mais $\ell'(X) = 0$ car $\ell(X) = 0$.

On en déduit que ℓ correspond à la variation marginale de la fonction valeur (maximum de L) qui découle du relâchement infinitésimal de la contrainte. Cela confirme que ℓ ne doit refléter que des accroissements (variations positives) de la fonc-

tion objectif et non le contraire si l'on recherche un maximum. Le multiplicateur peut ainsi s'appréhender de deux façons différentes. D'une part, il représente le coût marginal qui découle du respect de la contrainte car il traduit le manque à gagner sur la fonction f du fait que l'on ne puisse pas aller au-delà de la valeur X . D'autre part, il mesure le prix maximum que l'on serait prêt à dépenser pour que la contrainte se relâche de façon marginale. C'est pourquoi le multiplicateur représente aussi le prix implicite (ou encore prix fictif) de la contrainte.

Conditions nécessaires. Intéressons-nous à la première condition nécessaire et appliquons-lui le raisonnement marginaliste. Elle indique que si la contrainte n'est pas saturée, l'optimum est atteint si, comme dans le cas libre, l'objectif marginal, f' , s'annule. On a examiné les raisons du caractère optimal de cette décision. En revanche, dans le cas contraint, cette règle est modifiée puisqu'il faut que l'objectif marginal, f' , soit égal au coût marginal de la contrainte ℓ . La présence de la contrainte implique donc un nouvel arbitrage de l'agent qui doit trouver le bon équilibre entre son objectif et la contrainte. Plus précisément, comme la saturation de la contrainte implique un manque à gagner, la décision optimale fait en sorte que le prix fictif soit égal à l'objectif marginal évalué pour la valeur de la contrainte puisque le relâchement de la contrainte permettrait d'accroître l'objectif d'un montant équivalent à l'objectif marginal.

Le cas du producteur : Prenons un producteur de ressource non-renouvelable. Notons S la réserve de minerai contenue dans le gisement qu'il exploite. Il fait face à la contrainte $q \leq S$. Le lagrangien se note :

$$L = \pi(q) + \ell(S - q)$$

Les conditions servant à déterminer le maximum sont

$$L'_q = \pi'(q) - \ell = 0$$

$$L'_\ell = S - q \geq 0$$

$$\ell \geq 0, \ell(S - q) = 0$$

Rappelons que q^* est la solution du problème non contraint. Deux cas s'offrent au producteur selon que la contrainte est libre ou saturée. Si la taille du gisement S excède q^* , il n'a pas intérêt à saturer la contrainte. Donc, la ressource n'est pas rare et son prix implicite ℓ est nul.

En revanche, si la taille du gisement est plus faible que la quantité optimale du problème libre ($S < q^*$), la contrainte est saturée car la ressource devient rare. Le multiplicateur représente le coût marginal subi par le producteur dû à la nécessité de respecter la contrainte. Plus précisément, il s'agit du profit marginal $\pi'(S)$ reflétant la hausse du profit suite à une augmentation infinitésimale du stock, dont il bénéficierait si la contrainte se relâchait (si S était à peine plus grand). Ainsi, le multiplicateur mesure également le prix maximum que le producteur serait prêt à payer pour avoir une unité supplémentaire de ressource.

En termes de calcul marginal, on obtient les interprétations suivantes. Si la contrainte est libre, on retrouve l'arbitrage initial qui consiste à produire jusqu'à ce que le profit marginal s'annule, donc la recette marginale doit être égale au coût marginal technologique. Si elle est saturée, la production optimale est telle que le profit marginal doit être égal au coût marginal de la contrainte. En d'autres termes, la recette marginale est égale à la somme du coût marginal technologique et du coût marginal de la contrainte.

Exemple : Reprenons la fonction de profit π_e , et supposons que la taille du gisement est 3. Les conditions nécessaires sont :

$$\begin{aligned} L'_q &= 12 - 3q - \ell = 0 \\ L'_\ell &= 3 - q \geq 0 \\ \ell &\geq 0, \ell(3 - q) = 0 \end{aligned}$$

Si $\ell = 0$, la première condition nécessaire donne $q = 4 > 3$. Cela entre en contradiction avec la contrainte. Comme cela est impossible, la contrainte est saturée et on a $q_c = 3$. La première condition nécessaire fournit la valeur du multiplicateur, à savoir $\ell = 3$. Le prix implicite de la contrainte due au caractère non-renouvelable de la ressource est donc 3. Il représente le profit supplémentaire qu'obtiendrait le producteur si la contrainte se relâchait, c'est-à-dire si la taille du gisement augmentait de façon marginale. C'est aussi le prix maximum qu'il est prêt à payer pour desserrer la contrainte à la marge. En effet, ce relâchement lui procure un accroissement de profit de 3, donc tant qu'il lui coûte moins de 3, le producteur est gagnant, au-delà de 3, il devient perdant car la ressource lui revient plus cher qu'elle ne lui rapporte.

Considérons désormais que $S = 6$. Les deux dernières conditions nécessaires se modifient comme :

$$\begin{aligned} L'_\ell &= 6 - q \geq 0 \\ \ell &\geq 0, \ell(6 - q) = 0 \end{aligned}$$

Si $\ell = 0$, on obtient $q = 4 < 6$. Cette solution est donc compatible avec la contrainte. Supposons alors que la contrainte est saturée. On a $q = 6$. La première condition nécessaire donne $\ell = -6$, ce qui est incompatible avec le fait que le coût marginal associé à la contrainte (le multiplicateur) est obligatoirement non négatif, c'est-à-dire qu'il traduit la possibilité que le profit peut être accru. On en conclut que la solution du problème est celle du problème non contraint.

Terminons en précisant que les conditions nécessaires sont souvent simplifiées par l'omission de l'argument ℓ dans le lagrangien L car la dérivée partielle de L par rapport à ℓ ne fait que « rappeler » la présence de la contrainte que l'on connaît déjà. Ainsi, la deuxième condition nécessaire du théorème est souvent omise. Par ailleurs, cela permet de simplifier l'écriture de la fonction valeur qui devient

$$V = L(x_c(X), X) = f(x_c(X)) + \ell(X - x_c(X))$$

et de retrouver l'interprétation économique de ℓ grâce à l'application du théorème de l'enveloppe (théorème 1.7, paragraphe 1.3.3) :

$$V'(X) = L'_X(x_c(X), X) = \ell$$

Dit autrement, la fonction valeur associée à L évolue avec le paramètre X comme la dérivée partielle de L par rapport à X . Par la suite, on omettra l'écriture des arguments du lagrangien et n'écrirons plus la condition nécessaire sur ℓ s'il n'y a aucune ambiguïté.

1.4.2 Deux variables de décision et plusieurs contraintes

Considérons maintenant le problème général de maximisation d'une fonction f de deux variables définie sur $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ contenant deux contraintes. Celles-ci se matérialisent de la façon suivante :

$$g(x_1, x_2) \leq X \quad \text{et} \quad \gamma(x_1, x_2) \leq \xi$$

Les fonctions g et γ traduisent la façon dont sont combinées les décisions selon la ressource à laquelle on s'intéresse. Les paramètres X et ξ sont des nombres réels indiquant la quantité maximale de chaque ressource qu'il est possible de consacrer aux deux décisions. Notons ce problème contraint Ps_5 :

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \\ & s/c \quad g(x_1, x_2) \leq X \\ & \quad \gamma(x_1, x_2) \leq \xi \end{aligned}$$

Afin de mener une résolution analogue au paragraphe précédent, posons directement le lagrangien associé à Ps_5 . Comme il y a deux contraintes, celui-ci contient deux multiplicateurs. On a, en omettant les arguments de L :

$$L = f(x_1, x_2) + \ell(X - g(x_1, x_2)) + \lambda(\xi - \gamma(x_1, x_2))$$

où ℓ (resp. λ) est le multiplicateur de Kuhn et Tucker associé à la première (resp. seconde) contrainte réécrite sous la forme $X - g(x_1, x_2) \geq 0$ (resp. $\xi - \gamma(x_1, x_2) \geq 0$).

Remarque : L'écriture la plus générale possible d'une contrainte est en réalité $h(x_1, x_2) \geq 0$. Tous les aspects abordés par la suite peuvent se généraliser à ce cas. En effet, pour la contrainte $g(x_1, x_2) \leq X$, il suffit de poser $h(x_1, x_2) = X - g(x_1, x_2)$. Par souci d'homogénéité dans la présentation, on conserve le principe qu'une contrainte est composée d'un paramètre dont le niveau ne doit pas être dépassé.

A. Présentation des conditions nécessaires

On obtient le théorème suivant (voir annexe D.2) :

Théorème 1.9 (Kuhn et Tucker 2). *Les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker du problème Ps_5 sont :*

$$\begin{aligned} L'_{x_1} &= f'_{x_1}(x_1, x_2) - \ell g'_{x_1}(x_1, x_2) - \lambda \gamma'_{x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ L'_{x_2} &= f'_{x_2}(x_1, x_2) - \ell g'_{x_2}(x_1, x_2) - \lambda \gamma'_{x_2}(x_1, x_2) = 0 \\ \ell &\geq 0, \ell(X - g(x_1, x_2)) = 0 \\ \lambda &\geq 0, \lambda(\xi - \gamma(x_1, x_2)) = 0 \end{aligned}$$

Ces conditions nécessaires sont désormais familières :

- les dérivées partielles de L par rapport aux variables de décision s'annulent ;
- les conditions d'exclusion s'appliquent aux deux contraintes. Seules les valeurs positives des multiplicateurs sont pertinentes car le contraire entraînerait la saturation de la contrainte associée alors que ne pas la serrer s'avère préférable.

Notons (x_{1_c}, x_{2_c}) la solution contrainte de ce problème.

Résolution : À partir des conditions nécessaires, on obtient un système de quatre équations à quatre inconnues à résoudre pour lequel, comme précédemment, on doit envisager tour à tour qu'une contrainte est libre puis saturée. Il y a donc 2^2 possibilités (2^n s'il existe n contraintes), soit quatre cas à étudier qui débouchent sur l'une des solutions suivantes :

- les deux contraintes sont libres à l'optimum. Les multiplicateurs associés sont nuls car les contraintes ne sont pas actives et ne viennent pas limiter le champ d'action du décideur. Par conséquent, on retrouve la solution de l'optimisation libre ;
- à l'opposé, les deux contraintes sont saturées. Les deux multiplicateurs sont positifs et représentent le prix fictif de chacune d'elle, c'est-à-dire le bénéfice marginal que l'on retire de leur relâchement infinitésimal ;
- enfin, l'une des deux contraintes est saturée alors que l'autre est libre. Dans ce cas, une seule contrainte vient affecter la fonction objectif et le multiplicateur qui lui est associé est positif.

Parmi ces solutions potentielles, une seule rend la fonction objectif maximale tout en respectant l'ensemble des conditions nécessaires. Elle devient la solution du problème.

B. Interprétations des conditions nécessaires

Si la solution est libre (x_1^*, x_2^*) , on revient aux interprétations évoquées au paragraphe 1.3.2. Graphiquement, reprenons la figure 1.5 et matérialisons-y les contraintes (linéaires par simplicité) à l'aide de segments. On obtient la figure 1.11.

Les couples (x_1, x_2) se trouvant simultanément sous les deux contraintes sont accessibles. En revanche, ceux situés au dessus d'au moins l'une d'entre elles ne le sont pas. La croix qui indique la solution libre est donc accessible et il s'agit du choix optimal pour l'agent.

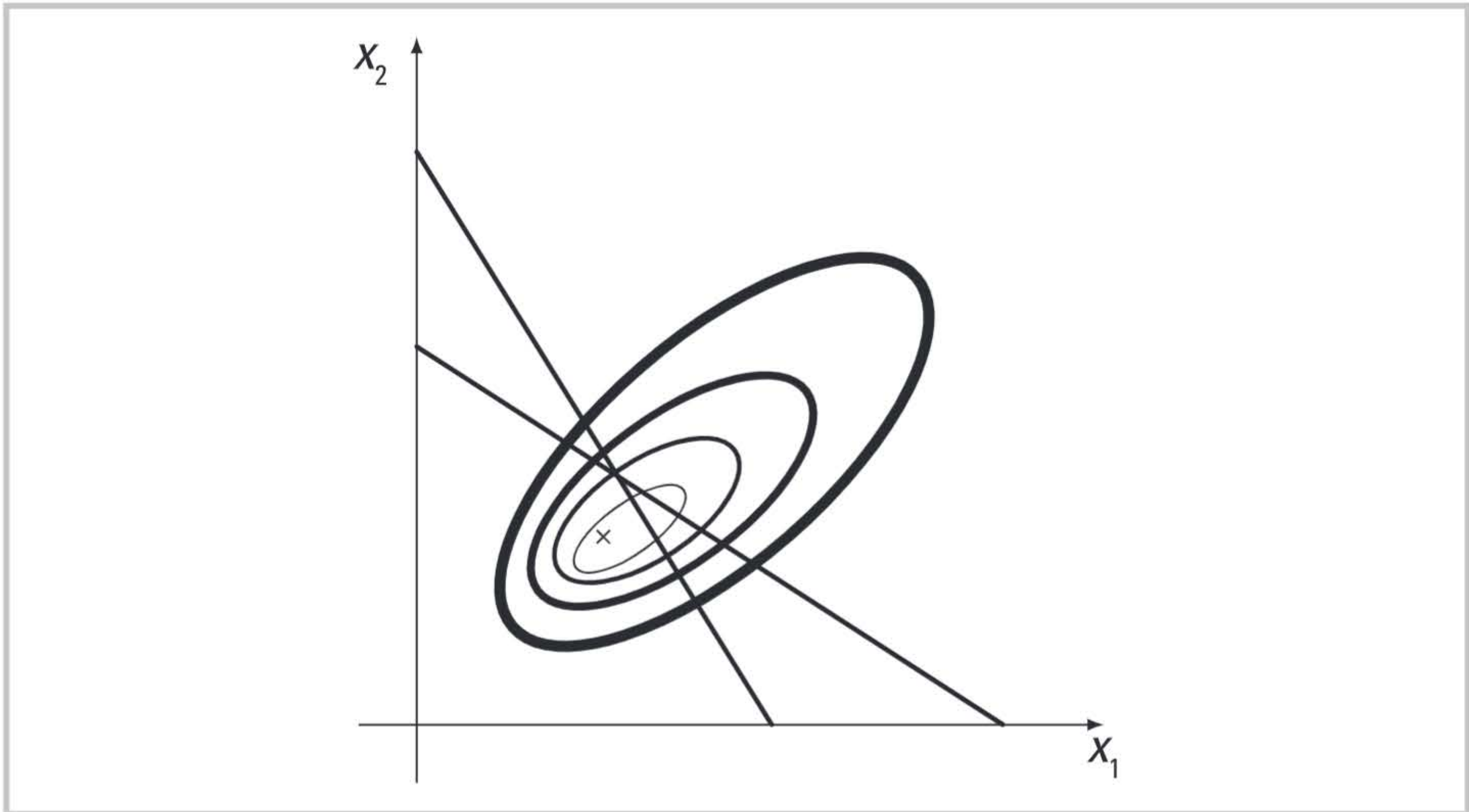
En revanche, si la solution est telle que l'une des deux contraintes est saturée, par exemple la première, alors on peut compléter les interprétations. Pour cela, constatons que les conditions nécessaires au point optimal sont :

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c}) &= \ell g'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c}) \\ f'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c}) &= \ell g'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c}) \end{aligned}$$

En faisant le rapport de ces deux égalités, on a :

$$\frac{f'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c})}{f'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c})} = \frac{g'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c})}{g'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c})}$$

Or ces ratios ont deux interprétations économiques intéressantes. En effet, par application du théorème des fonctions implicites (voir annexe D.1) à la fonction objec-

**FIGURE 1.11**

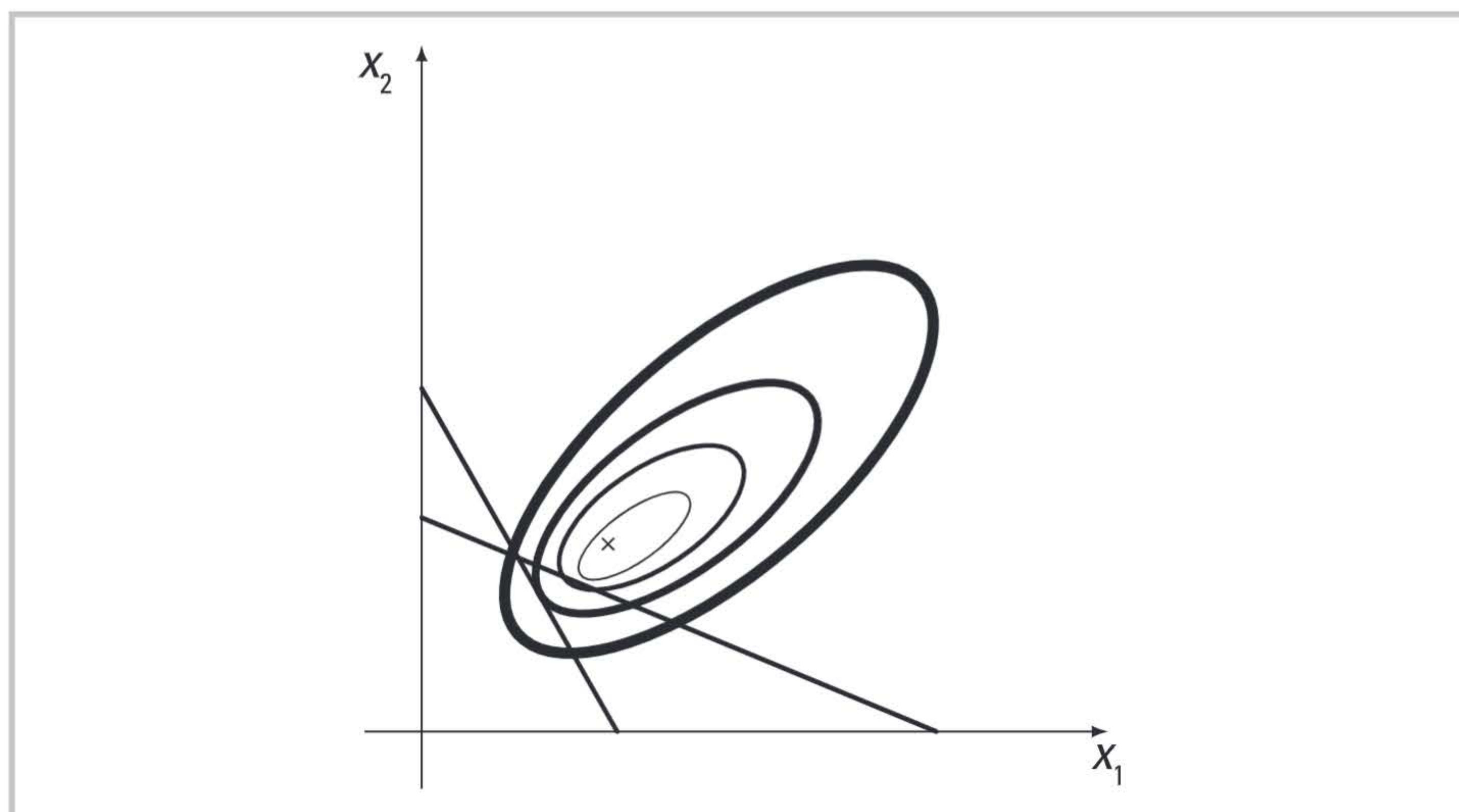
Optimisation contrainte : solution graphique (1)

tif, le ratio $\frac{f'_{x_1}(x_1, x_2)}{f'_{x_2}(x_1, x_2)}$ représente le taux marginal de substitution entre les décisions 1 et 2 associé à f , c'est-à-dire, la diminution du niveau de la décision 2 que l'agent doit consentir pour maintenir son objectif constant, suite à une hausse marginale du niveau de la décision 1. Quant à $\frac{g'_{x_1}(x_1, x_2)}{g'_{x_2}(x_1, x_2)}$, il s'agit du coût d'opportunité associé à la contrainte saturée par application du même théorème. En effet, si l'agent consacre plus de ressource à la décision 1, cela nécessite de réduire la part de celle-ci dévolue à la décision 2, sinon la contrainte n'est plus respectée.

L'optimalité est donc caractérisée par l'égalité du taux marginal de substitution de la fonction objectif et du coût d'opportunité de la contrainte saturée. Supposons que ce ne soit pas le cas et que le point (x_{1_c}, x_{2_c}) , bien que saturant la contrainte, est tel que

$$\frac{f'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c})}{f'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c})} > \frac{g'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c})}{g'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c})}$$

Cela indique que la réduction du niveau de la décision 2 pour maintenir l'objectif constant, est trop importante pour permettre à l'agent de continuer à serrer sa contrainte. Concrètement, il se trouve en dessous de la contrainte. Il peut donc augmenter le niveau de la décision 1 de manière à satisfaire la maximisation de son objectif. Si l'inégalité inverse apparaît, la diminution du niveau de la décision 2 n'est pas suffisante pour que l'agent sature sa contrainte car il se retrouve au-dessus. Il doit donc réduire le niveau de la décision 1 afin de maximiser sa fonction objectif.

**FIGURE 1.12**

Optimisation contrainte : solution graphique (2)

Graphiquement, représentons des contraintes plus exigeantes que précédemment sur la figure 1.5. Cela donne la figure 1.12.

Désormais, la solution du problème libre (toujours matérialisée par la croix) est située au dessus des contraintes. Elle n'est donc plus accessible. L'agent est dans une situation où au moins une contrainte est saturée. La solution est alors nécessairement située au point de tangence entre la courbe de niveau la plus élevée possible et l'une des deux contraintes. Sur la figure 1.12, c'est donc le point où se fait la rencontre de la deuxième courbe de niveau en partant de l'extérieur et la contrainte la plus inclinée. Pour le démontrer, considérons que ce n'est pas le cas. La solution est alors soit sur une courbe de niveau plus élevée, soit moins élevée. Dans le premier cas (par exemple la courbe de niveau la plus fine), les couples (x_1, x_2) sont plus satisfaisants pour l'agent mais cette courbe est située au-delà des décisions accessibles. Dans le second cas (par exemple la courbe de niveau la plus épaisse), l'ensemble des points situés simultanément au-dessus de cette courbe et au-dessous de la contrainte représentent des couples à la fois accessibles et plus intéressants car situés sur des courbes de niveau (non représentées) accroissant l'objectif poursuivi. Or la courbe de niveau la plus élevée appartenant à cet ensemble est justement celle qui est tangente à la contrainte. La solution est donnée graphiquement par les coordonnées de ce point de tangence.

Enfin, supposons que la solution est telle que les deux contraintes sont saturées. Graphiquement, le point optimal est situé au niveau de l'angle formé par l'intersection des deux contraintes. Dans ce cas, ce point est le point de tangence entre la courbe de

niveau la plus élevée et une combinaison linéaire des contraintes pour laquelle le poids associé à chaque contrainte correspond aux multiplicateurs de Kuhn et Tucker. En effet, les conditions nécessaires se récrivent :

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c}) &= \ell g'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c}) + \lambda \gamma'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c}) \\ f'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c}) &= \ell g'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c}) + \lambda \gamma'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c}) \end{aligned}$$

et on trouve que :

$$\frac{f'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c})}{f'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c})} = \frac{\ell g'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c}) + \lambda \gamma'_{x_1}(x_{1_c}, x_{2_c})}{\ell g'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c}) + \lambda \gamma'_{x_2}(x_{1_c}, x_{2_c})}$$

Le cas du producteur : Reprenons le cas du minerai disponible en quantité S . Supposons que le producteur l'utilise comme input afin de fabriquer deux biens : l'un brut en quantité q_1 , l'autre raffiné en quantité q_2 . Considérons aussi qu'il soit obligé de stocker les produits qu'il fabrique avant de les vendre. La capacité totale de stockage est K . Il fait donc face à deux contraintes : la première contrainte sur le minerai est

$$g(q_1, q_2) \leq S$$

où la fonction $g(q_1, q_2)$ traduit la façon dont est utilisé le minerai pour produire q_1 unités du bien 1 et q_2 unités du bien 2. La seconde est

$$\gamma(q_1, q_2) \leq K$$

avec $\gamma(q_1, q_2)$ la fonction indiquant les combinaisons de stockage des produits 1 et 2.

Exemple : Supposons que si le producteur consacre une unité de minerai à la production du bien 2, il en fabrique $\frac{1}{2}$ unité, tandis que s'il la destine au bien 1, il en obtient une unité. La première contrainte est donc : $q_1 + 2q_2 \leq S$. En effet, si tout le minerai est utilisé pour le bien 1, la quantité maximale qu'il peut produire est $q_1 = S$. En revanche, si la totalité du gisement est allouée au bien 2, la quantité maximale qu'il est en mesure de produire est $q_2 = \frac{S}{2}$. Supposons également qu'une unité de bien 1 occupe le même volume qu'une unité de bien 2 car le bien raffiné nécessite un confinement plus important que le brut. La seconde contrainte se matérialise par : $q_1 + q_2 \leq K$. Le problème est :

$$\begin{aligned} \max_{q_1, q_2} \pi_a &= -\frac{1}{2}q_1^2 + q_1(q_2 + 2) - \frac{3}{2}q_2^2 \\ \text{s/c } q_1 + 2q_2 &\leq S \\ q_1 + q_2 &\leq K \end{aligned}$$

Le lagrangien est :

$$L = -\frac{1}{2}q_1^2 + q_1(q_2 + 2) - \frac{3}{2}q_2^2 + \ell(S - q_1 - 2q_2) + \lambda(K - q_1 - q_2)$$

Les conditions nécessaires sont :

$$L'_{q_1} = -q_1 + q_2 + 2 - \ell - \lambda = 0 \quad (1.5)$$

$$L'_{q_2} = q_1 - 3q_2 - 2\ell - \lambda = 0 \quad (1.6)$$

$$\ell \geq 0, \ell(S - q_1 - 2q_2) = 0 \quad (1.7)$$

$$\lambda \geq 0, \lambda(K - q_1 - q_2) = 0 \quad (1.8)$$

Tout d'abord, prenons le cas où $S = 6$ et $K = 4,5$. Algébriquement, commençons par examiner le cas où les deux contraintes sont libres. On a $\ell = \lambda = 0$. Les deux premières conditions nécessaires (1.5) et (1.6) sont équivalentes alors à celles de l'optimisation libre et on obtient la même solution $q_1 = 3$ et $q_2 = 1$. Cette solution est optimale car les contraintes sont respectées, pour la première on a $5 < 6$, et pour la seconde $4 < 4,5$.

Représentons sur la figure 1.13 les contraintes de stockage et de minerai associées à $S = 6$ et $K = 4,5$. La production $q_1 = 3$ et $q_2 = 1$ est donc réalisable. Le producteur est dans une situation où il n'est contraint ni sur le minerai ni sur le stockage. Les deux contraintes sont libres. Les multiplicateurs associés aux contraintes sont nuls, $\ell = \lambda = 0$. La solution libre est donc la solution optimale, ce qui assure un profit de 3.

Examinons maintenant le cas où $S = 3$ et $K = 2$. Il est immédiat que la solution libre n'est plus l'optimum recherché puisque $5 > 3$ et $4 > 2$. Il faut étudier les trois autres cas possibles.

- La contrainte sur le minerai est saturée ($\ell \geq 0$), celle associée au stockage est libre ($\lambda = 0$). De la première contrainte satisfaite à l'égalité, on peut exprimer q_1 en fonction de q_2 , soit : $q_1 = 3 - 2q_2$. En insérant cette égalité dans les conditions (1.5) et (1.6), on tire puisque $\lambda = 0$:

$$-3 + 3q_2 + 2 = \ell = \frac{3 - 5q_2}{2} \quad \text{d'où} \quad q_2 = \frac{5}{11}$$

Par suite, il vient : $q_1 = \frac{23}{11}$ et $\ell = \frac{4}{11}$. En additionnant q_1 et q_2 , on constate que la capacité de stockage n'est pas respectée puisque $\frac{28}{11} > 2$. Cette solution est donc impossible car il s'agit d'une production non réalisable.

- La contrainte sur le minerai est libre ($\ell = 0$), celle associée au stockage est saturée ($\lambda \geq 0$). En suivant une démarche symétrique à celle du cas précédent, on obtient : $q_1 = \frac{5}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$. La contrainte sur le minerai est satisfaite car $q_1 + 2q_2 = \frac{7}{3} < 3$. Ce couple de production est donc candidat à la solution.

- Les deux contraintes sont saturées, $\ell \geq 0$ et $\lambda \geq 0$. La solution est donnée par la résolution du système d'équations fourni par les contraintes. On obtient $q_1 = q_2 = 1$. Cela est possible si les multiplicateurs sont positifs. En insérant ces valeurs dans (1.5) et (1.6), on a

$$\begin{aligned} 2 - \ell - \lambda &= 0 \\ -2 - 2\ell - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

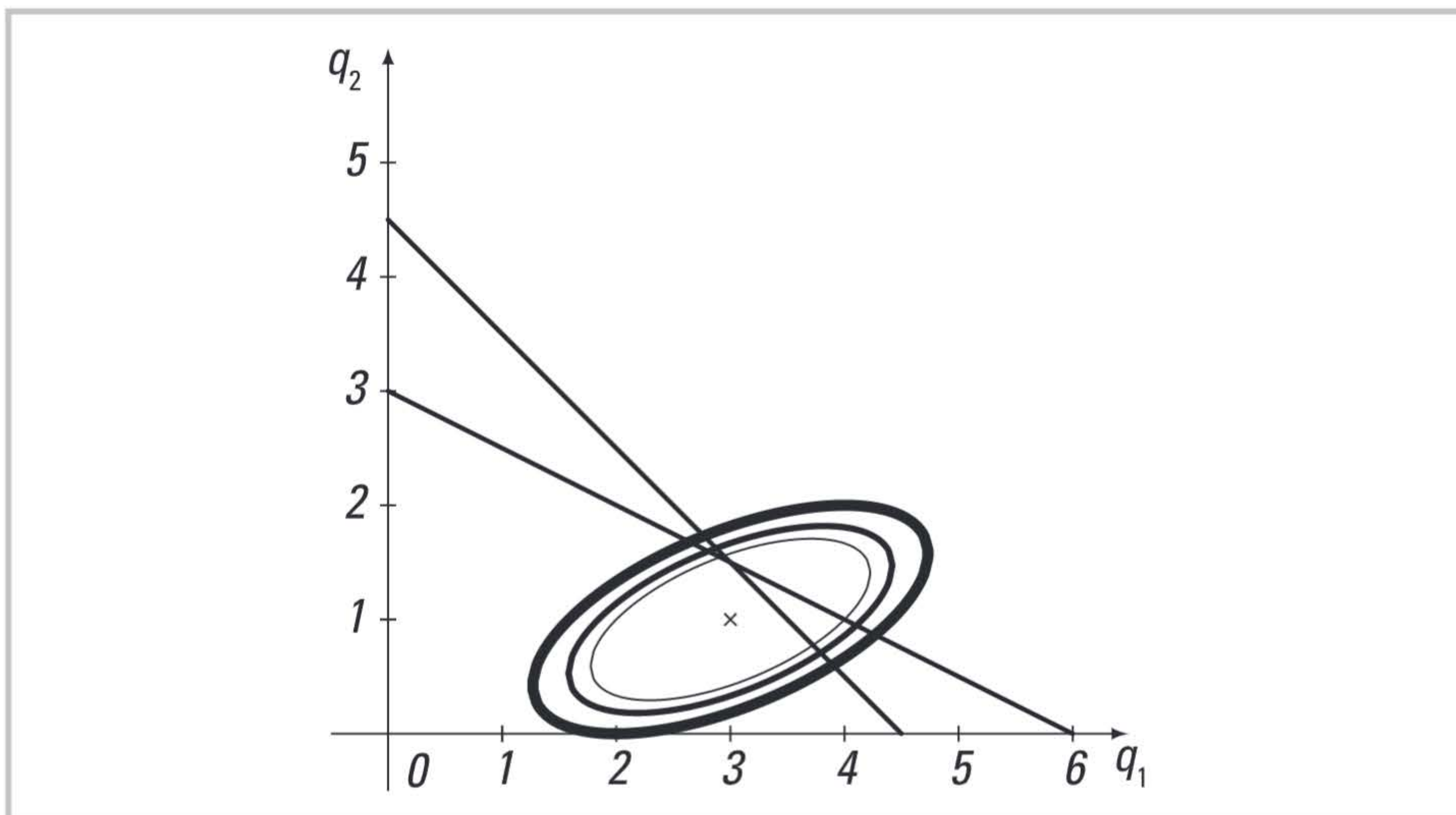
ce qui après résolution donne : $\ell = -4$ et $\lambda = 6$. Tout comme la solution précédente, cette solution est possible. Mais elle n'est pas optimale car elle revient à serrer la contrainte sur le minerai alors que ce n'est pas optimal (comme le prouve le multiplicateur négatif $\ell = -4$) et à augmenter le prix fictif de la contrainte de stockage par rapport à la solution précédente ($\lambda = 6 > \frac{2}{3}$).

La solution du problème est donc $q_{1c} = \frac{5}{3}$ et $q_{2c} = \frac{1}{3}$, le profit obtenu est $\pi_a = 2,33$ tandis que le prix fictif de la contrainte de stockage est $\frac{2}{3}$. Il représente le supplément de profit qu'obtiendrait le producteur si la capacité de stockage K s'accroissait de façon infinitésimale ainsi que le prix maximum qu'il serait prêt à payer pour augmenter à la marge sa capacité de stockage.

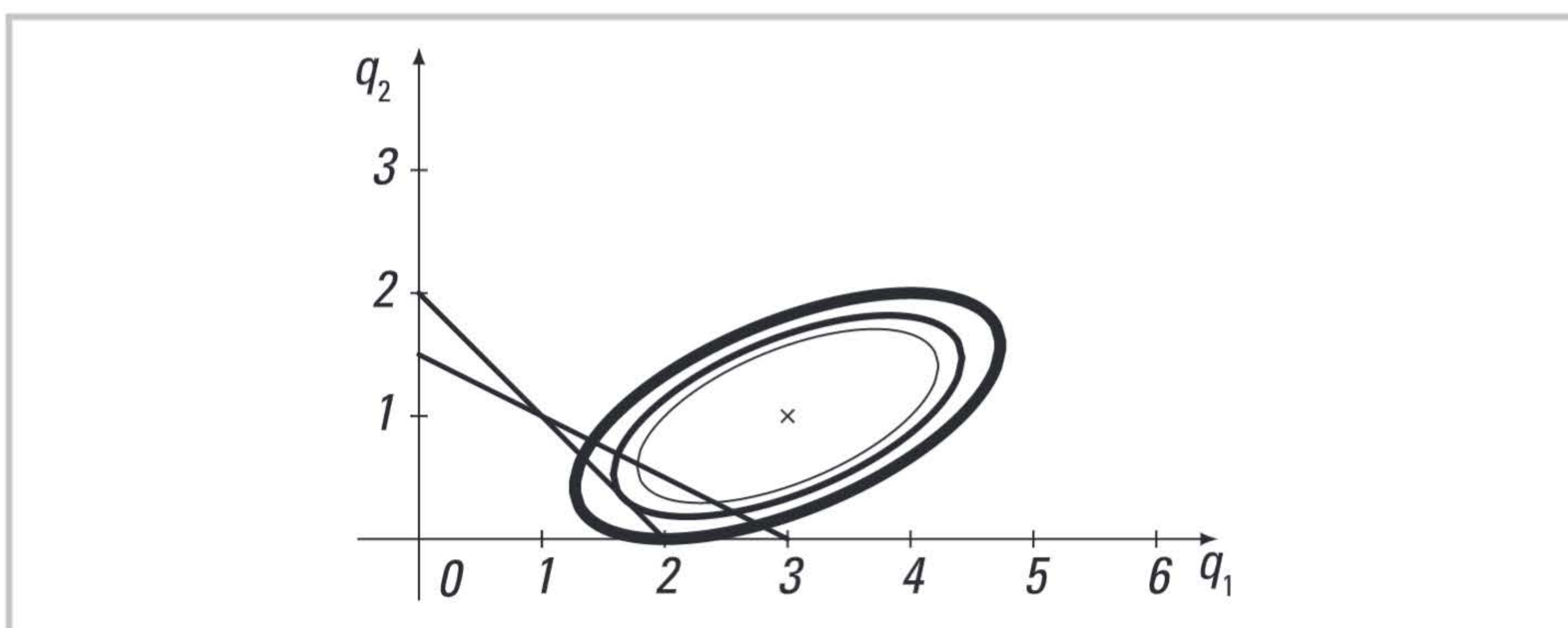
Examinons la solution graphique. On obtient la figure 1.14. Désormais, la solution du problème libre n'est pas réalisable. Ainsi, la solution est nécessairement située au point de tangence entre la courbe de niveau la plus élevée possible et l'une des deux contraintes. Sur cette figure, c'est le point où se fait la rencontre de la courbe de niveau $\mathcal{C}_{2,33}$ et la contrainte de stockage. La solution est donnée graphiquement par les coordonnées de ce point de tangence $q_{1c} = \frac{5}{3}$ et $q_{2c} = \frac{1}{3}$. Comme l'indique la courbe de niveau, le profit est bien $\pi_a = 2,33$. En revanche, la solution graphique ne permet pas de déterminer le prix fictif de la contrainte saturée.

C. Régularité des contraintes

Ce paragraphe a pour but de démontrer qu'il est nécessaire que les contraintes évaluées au point optimal (x_{1c}, x_{2c}) soient régulières afin que le théorème 1.9 détecte la solution. Pour cela, on adopte des concepts et des notations du calcul matriciel (voir annexe A).

**FIGURE 1.13**

Solution du problème contraint quand $K = 4,5$ et $S = 6$

**FIGURE 1.14**

Solution du problème contraint quand $K = 2$ et $S = 3$

Présentons la définition suivante :

Définition 1.11. (Régularité des contraintes). *Une contrainte est dite régulière au point (x_1, x_2) si elle est libre ou, lorsqu'elle est saturée, si son gradient en ce point est différent du vecteur nul.*

Commençons par supposer que seule la contrainte $g(x_1, x_2) \leq X$ est saturée. Par définition, (x_{1_c}, x_{2_c}) est la solution du problème. Ainsi, si la contrainte n'est pas régulière, les deux premières conditions nécessaires du théorème 1.9 :

$$\nabla f(x_{1_c}, x_{2_c}) = \ell \nabla g(x_{1_c}, x_{2_c})$$

se réduisent à $\nabla f(x_{1_c}, x_{2_c}) = \mathbf{0}$ puisqu'alors $\nabla g(x_{1_c}, x_{2_c}) = \mathbf{0}$. Or, le système d'équations $\nabla f(x_1, x_2) = \mathbf{0}$ sous-entend que la solution du problème est (x_1^*, x_2^*) et non (x_{1_c}, x_{2_c}) . Autrement dit, les conditions nécessaires débouchent sur une contradiction et ne permettent pas de détecter la solution du problème. On en déduit qu'elles ne permettent pas non plus de déterminer de façon unique la valeur du multiplicateur (qui doit être positif puisque la contrainte est saturée).

Le raisonnement est le même si l'on s'intéresse à la régularité de la contrainte $\gamma(x_1, x_2) \leq \xi$. Mais que se passe-t-il si les deux contraintes sont saturées ? Les conditions nécessaires deviennent :

$$\nabla f(x_{1_c}, x_{2_c}) = (\nabla g(x_{1_c}, x_{2_c}), \nabla \gamma(x_{1_c}, x_{2_c})) \begin{pmatrix} \ell \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Le problème de l'unicité des multiplicateurs resurgit si la matrice $(\nabla g(x_{1_c}, x_{2_c}), \nabla \gamma(x_{1_c}, x_{2_c}))$ n'est pas inversible (voir annexe A), donc si les vecteurs $\nabla g(x_1, x_2)$ et $\nabla \gamma(x_1, x_2)$ évalués au point (x_{1_c}, x_{2_c}) sont linéairement dépendants.

Comment s'assurer que les contraintes sont bien régulières ? Pour cela, il faut faire appel à la définition suivante :

Définition 1.12. *On appelle matrice jacobienne associée aux contraintes saturées, la matrice notée JG_s des dérivées partielles des contraintes qui la composent. Soit :*

$$JG_s(x_1, x_2) = \nabla g(x_1, x_2) \text{ si seule la contrainte } g(x_1, x_2) \leq X \text{ est saturée}$$

$$JG_s(x_1, x_2) = \nabla \gamma(x_1, x_2) \text{ si seule la contrainte } \gamma(x_1, x_2) \leq \xi \text{ est saturée}$$

$$JG_s(x_1, x_2) = (\nabla g(x_1, x_2), \nabla \gamma(x_1, x_2)) \text{ si les contraintes sont saturées}$$

Ainsi, puisqu'il faut éviter que $\nabla g(x_{1_c}, x_{2_c}) = \mathbf{0}$ ou $\nabla \gamma(x_{1_c}, x_{2_c}) = \mathbf{0}$, si la contrainte $g(x_1, x_2) \leq X$ ou $\gamma(x_1, x_2) \leq \xi$ est saturée, ou encore que la matrice $(\nabla g(x_1, x_2), \nabla \gamma(x_1, x_2))$ ne soit pas composée de vecteurs colinéaires, on déduit que les contraintes sont régulières si le rang de la matrice JG_s évalué en (x_{1_c}, x_{2_c}) est égal au nombre de contraintes saturées. Une condition qui garantit cela est que les contraintes soient toutes linéaires.

Exemple : Dans l'exemple du producteur, avec $K = 2$ et $S = 3$, seule la contrainte sur la capacité de stockage était saturée. On vérifie que la matrice $JG_s(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1. On peut également remarquer que si les deux contraintes sont saturées, la matrice $JG_s(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est bien de rang 2.

1.4.3 Conditions suffisantes

Jusqu'à présent, les théorèmes concernant l'optimisation sous contraintes n'exposent que des conditions nécessaires. Il reste à aborder les conditions suffisantes en se centrant sur le cas à deux variables et deux contraintes et en utilisant l'écriture vectorielle et matricielle.

Rappelons que pour l'optimisation libre, la concavité de $f(\mathbf{x})$ est une condition suffisante. Dans l'annexe D.1, on montre que cela nécessite $f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) \leq 0$ et $\det(\nabla^2 f(\mathbf{x})) \geq 0$. Par analogie, on pourrait être amené à penser que si :

$$\begin{aligned} L''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) &< 0 \\ \det(\nabla^2 L(\mathbf{x})) &> 0 \end{aligned}$$

alors les conditions nécessaires sont suffisantes. Toutefois, ce serait oublier que lorsqu'une contrainte est saturée, les valeurs de x_1 et x_2 sont dépendantes les unes des autres. Concrètement, quand l'une des variables prend une valeur, l'autre est donnée par la contrainte. Autrement dit, il faut tenir compte des contraintes saturées pour évaluer les conditions ci-dessus. Plus précisément, si la contrainte $X \geq g(\mathbf{x})$ est saturée (par exemple), la différentielle de cette expression donne

$$\nabla g(\mathbf{x}_c)^T d\mathbf{x}_c = 0$$

ce qui matérialise cette dépendance à travers les variations de x_1 , notées dx_{1_c} , et celles de x_2 , notées dx_{2_c} .

La détermination de conditions suffisantes revient donc à signer une forme quadratique contrainte (voir annexe D.1). Dans cet esprit, en notant $JG_s(\mathbf{x}_c)$ la matrice jacobienne associée à la contrainte saturée, on obtient :

Théorème 1.10 (Suffisance des conditions de Kuhn et Tucker). *Les conditions suffisantes associées au problème Ps_5 sont :*

$$\det \begin{pmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{x}_c) & JG_s(\mathbf{x}_c) \\ JG_s(\mathbf{x}_c)^T & 0 \end{pmatrix} > 0$$

Remarque : Dans le cas à plus de deux variables et plus de deux contraintes, la condition du signe du déterminant seule ne suffit plus. Il est nécessaire de signer des mineurs diagonaux principaux (voir annexe A) de la matrice qui le constitue.

Les conditions suffisantes portent donc sur la courbure du lagrangien, ce qui *a priori* nécessite une information sur le caractère libre ou saturé de la contrainte et donc sur la nullité ou non des multiplicateurs. Ainsi, on est tenté de se demander si l'on ne peut pas identifier des conditions portant directement sur les fonctions f et g (ou γ si c'est cette dernière qui sature) qui garantissent les conditions suffisantes.

Considérons pour simplifier que les contraintes sont linéaires. Puis, rappelons que graphiquement la solution contrainte correspond au point de tangence entre l'une des deux contraintes et la courbe de niveau la plus élevée possible. Pour que ce point apparaisse de façon unique, il est suffisant que les courbes de niveau soient décroissantes et convexes (et pas nécessairement circulaires comme on l'a vu jusqu'à présent). Dès lors, puisque la pente de la courbe de niveau correspond au taux marginal de substitution de la fonction objectif, la convexité est assurée si ce dernier décroît avec la variable x_1 . Il suffit donc de vérifier la condition $\left(\frac{f'_{x_1}(\mathbf{x})}{f'_{x_2}(\mathbf{x})} \right)'_{x_1} \leq 0$, en sachant que x_2 est liée à x_1 par la fonction implicite $f(\mathbf{x}) = k$ puisque l'on se déplace le long d'une courbe de niveau. Par analogie avec les calculs précédents, cela donne

$$\det \begin{pmatrix} \nabla^2 f(\mathbf{x}) & \nabla f(\mathbf{x}) \\ \nabla f(\mathbf{x})^T & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1.9)$$

Or, le théorème suivant indique que les fonctions (à deux variables) satisfaisants cette condition sont qualifiées de quasi-concaves (voir annexe D.1) :

Théorème 1.11 (Quasi-concavité, ordre 2). *Une fonction f est quasi-concave si et seulement si (1.9) est vérifiée.*

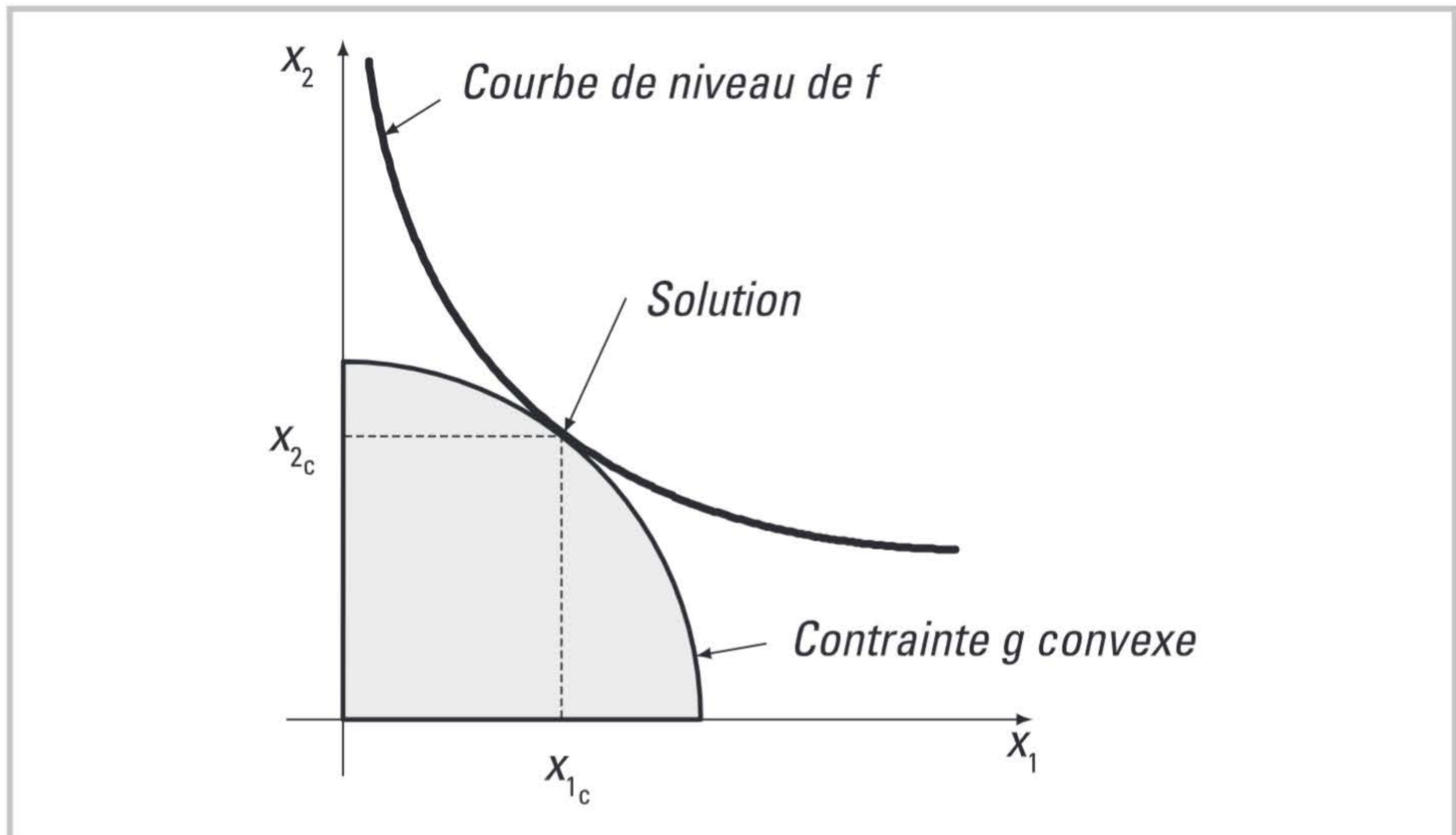
Dans le cas d'un problème contraint linéairement, on déduit à partir de ce théorème, que la quasi-concavité de la fonction objectif est une condition suffisante pour que le théorème 1.9 s'applique. Est-ce également le cas si la fonction objectif est concave ? La réponse est oui car en vertu du théorème suivant, la quasi-concavité est une notion qui généralise la concavité :

Théorème 1.12 (Concavité et quasi-concavité). *Toute fonction concave est quasi-concave.*

Notons toutefois, que la réciproque de ce théorème n'est pas vraie : il existe des fonctions quasi-concaves qui ne sont pas concaves, d'où l'intérêt de mentionner ce concept.

En terme interprétatif, puisque la concavité correspond à la décroissance marginale globale de la fonction f , la quasi-concavité, quant à elle, assure la décroissance marginale globale de la fonction, uniquement pour des variations le long d'une même courbe de niveau.

Poursuivons le raisonnement en considérant que la fonction g est désormais convexe. Le schéma de la figure 1.15 concrétise cette situation.

**FIGURE 1.15**Solution contrainte : fonction g convexe

On observe ainsi qu'il ne peut y avoir qu'un point de tangence entre la courbe de niveau et la contrainte, les conditions nécessaires sont ainsi suffisantes. On en déduit que des conditions portant sur g et f doivent pouvoir assurer la suffisance des conditions nécessaires.

Dans ce but, il est possible d'édicter un mini catalogue de conditions suffisantes sur la fonction objectif et les contraintes (régulières) qui garantissent que les conditions de Kuhn et Tucker détectent bien un maximum :

- si la fonction objectif est linéaire et les contraintes sont convexes ou quasi-convexes ;
- si la fonction objectif est concave et les contraintes sont linéaires, convexes ou quasi-convexes ;
- si la fonction objectif est quasi-concave et les contraintes sont linéaires ou convexes ;
- si la fonction objectif est quasi-concave avec des dérivées partielles ne s'annulant pas et les contraintes sont au moins quasi-convexes.

Remarque : La notion de quasi-concavité d'une fonction n'est pas très intuitive car elle se repère en analysant non pas son graphe mais ses courbes de niveaux. C'est pourquoi, il est fréquent de définir la quasi-concavité à partir des ensembles convexes.

Définition 1.13. (Ensemble convexe). *Un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ est convexe si pour tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ et pour tout $t \in [0,1]$, le point $tx_1 + (1-t)x_2 \in \mathcal{A}$.*

Autrement dit, un ensemble \mathcal{A} est convexe s'il contient tout segment joignant deux de ses points. On peut alors avancer le théorème suivant (voir annexe D.1) :

Théorème 1.13 (Fonction quasi-concave et ensemble convexe). *Soit k un nombre réel. L'ensemble $\mathcal{A}_k = \{\mathbf{x} \text{ tels que } f(\mathbf{x}) \geq k\}$ est convexe si la fonction f est quasi concave.*

Expliquons ce lien en commençant par préciser le concept suivant (de manière intuitive).

Définition 1.14. (Frontière d'un ensemble). *La frontière d'un ensemble est constituée des éléments situés au bord de l'ensemble, c'est-à-dire des éléments qui peuvent être approchés à la fois par l'intérieur et l'extérieur de cet ensemble.*

Ainsi, toute fonction f quasi-concave satisfait la propriété d'avoir des courbes de niveau \mathcal{C}_k formant la frontière des ensembles convexes : $\mathcal{A}_k = \{\mathbf{x} \text{ tels que } f(\mathbf{x}) \geq k\}, \forall k$, constitués des points qui assurent à la fonction f une valeur au moins égale à k .

Ce lien permet d'appréhender une classe de fonctions d'une variable quasi-concaves sans être forcément concaves : les fonctions unimodales. Par exemple $f(x) = \exp(-x^2)$ n'est pas toujours concave mais toujours strictement quasi-concave.

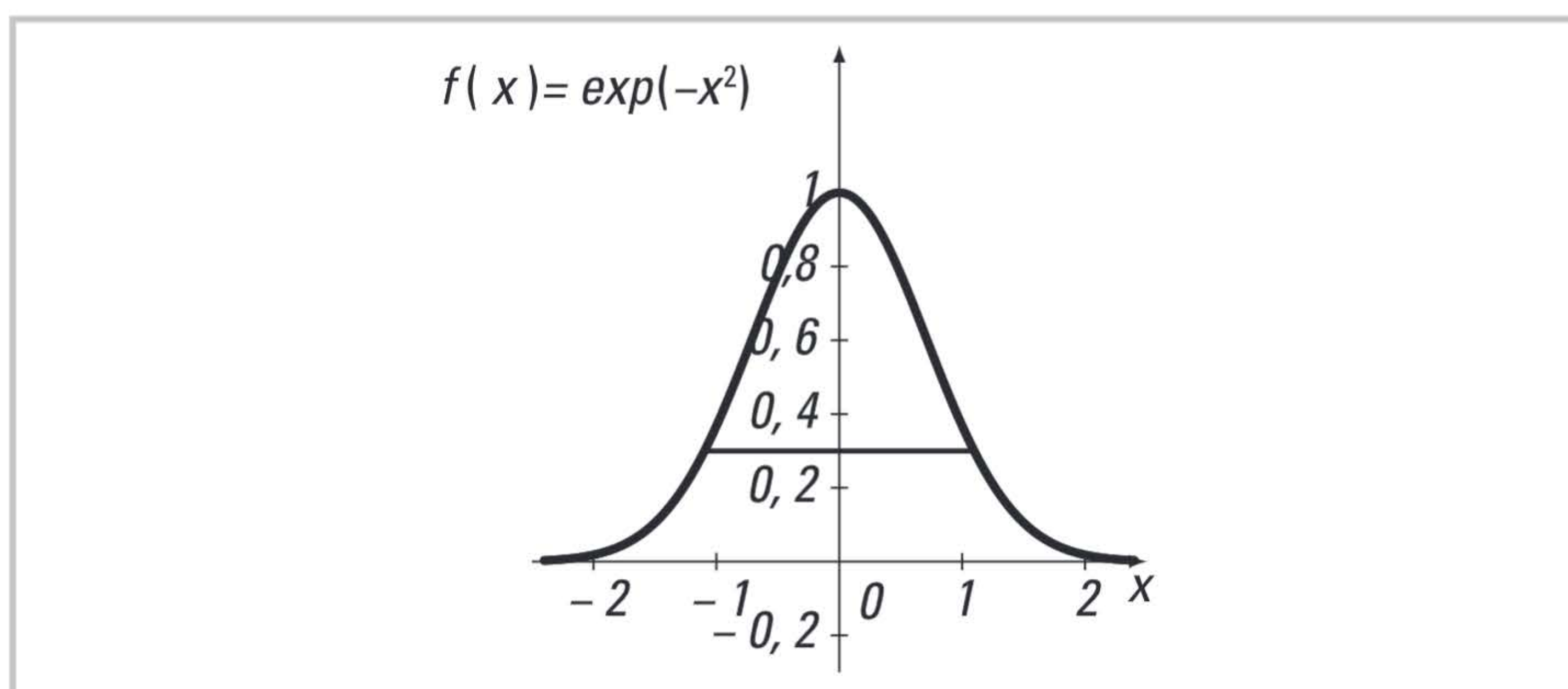


FIGURE 1.16

Fonction unimodale : $f(x) = \exp(-x^2)$

Sa représentation sur la figure 1.16 montre que le segment horizontal est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geq \frac{3}{10}$. Il est bien convexe ainsi que tout les segments tels que $f(x) \geq y, \forall y \in [0, 1]$.

Exemple : Considérons que la fonction de profit associée à la production de deux biens se réduit à l'expression suivante : $\pi_a(\mathbf{q}) = q_1(q_2 + 2)$. Cette fonction n'est pas concave puisqu'on a :

$$\pi''_{a_{q_1 q_1}}(\mathbf{q}) = \pi''_{a_{q_2 q_2}}(\mathbf{q}) = 0$$

et

$$\pi''_{a_{q_1 q_1}}(\mathbf{q})\pi''_{a_{q_2 q_2}}(\mathbf{q}) - \left(\pi''_{a_{q_1 q_2}}(\mathbf{q})\right)^2 = -1$$

où $\pi''_{a_{q_1 q_2}}(\mathbf{q}) = 1$. Vérifions qu'elle est quasi-concave. On obtient : $\pi'_{a_{q_1}}(\mathbf{q}) = q_2 + 2$, $\pi'_{a_{q_2}}(\mathbf{q}) = q_1$ soit au total pour l'équation (1.9):

$$2(q_2 + 1)q_1 \geq 0$$

Par ailleurs, étudions l'allure de la courbe de niveau \mathcal{C}_{10} , c'est-à-dire l'ensemble des productions assurant un profit de 10. On obtient la figure 1.17. On vérifie que l'ensemble des points situés au-dessus de cette courbe de niveau assurent un profit supérieur à 10 et forment un ensemble convexe.

À titre d'exercice, le lecteur peut vérifier que lorsque $S = 6$ et $K = 4,5$, la solution du problème du producteur maximisant $\pi_a(\mathbf{q})$ sous les contraintes de ressource et de stock, est telle que $q_{1_c} = 3,25$ et $q_{2_c} = 1,25$.

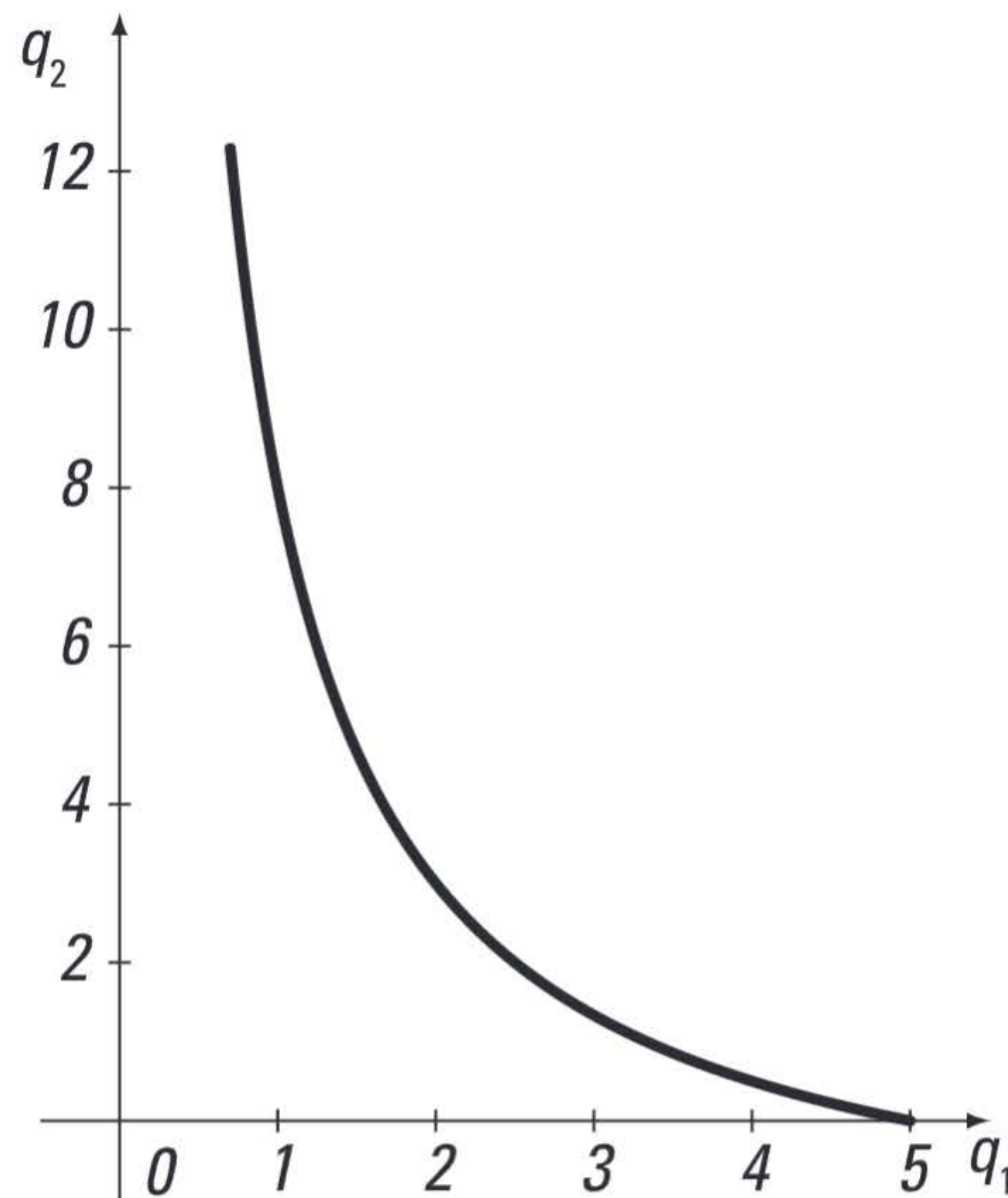


FIGURE 1.17

Courbe de niveau de π_a

1.5 PROLONGEMENTS

On aborde dans cette section un ensemble de situations qui peuvent être considérées comme des prolongements des résultats et théorèmes présentés jusqu'ici. Par souci de simplicité, chaque fois qu'un prolongement abordé pourra s'étendre sans peine à deux variables, on ne considérera que le cas à une variable. Toutefois, afin d'être plus général que précédemment, on étudiera le problème à une variable suivant, noté Ps_6 :

$$\begin{aligned} \max_x & f(x) \\ \text{s/c} & g(x) \leq X \end{aligned}$$

La contrainte s'est donc un peu complexifiée par rapport au paragraphe 1.4.1 car désormais une fonction g quelconque la compose. Le lagrangien est ici

$$L = f(x) + \ell(X - g(x)) \quad (1.10)$$

et les conditions nécessaires sont :

$$\begin{aligned} L'_x &= f'(x) - \ell g'(x) = 0 \\ \ell &\geq 0, \ell(X - g(x)) = 0 \end{aligned}$$

La solution se note x_c , tandis que celle du problème libre donnée par $f'(x) = 0$ est notée x^* .

1.5.1 Autres types de contraintes

On examine trois aspects : les contraintes sous forme d'égalité, les contraintes de non-négativité et les solutions en coin.

A. Contrainte sous forme d'égalité

La contrainte se matérialise parfois à travers une égalité stricte, $g(x) = X$. On la qualifie alors de liaison. On a le théorème suivant

Théorème 1.14 (Lagrange). *Les conditions nécessaires (incluant celle associée au multiplicateur) deviennent :*

$$\begin{aligned} L'_x &= f'(x) - \ell = 0 \\ L'_\ell &= X - g(x) = 0 \end{aligned}$$

La deuxième condition implique que le problème est contraint par une liaison qui est toujours vérifiée. Avec une variable de décision, la solution x_c est déterminée implicitement par l'équation $g(x_c) = X$, mais, ce qui importe ici est de noter qu'une liaison peut impliquer des valeurs négatives pour ℓ si $X > x^*$. Le multiplicateur associé à une liaison est dit de Lagrange.

Exemple : Revenons au cas du producteur d'un bien ne rencontrant pas de contrainte de ressource. Supposons qu'il n'ait qu'un seul client et qu'il se soit engagé à mettre à sa disposition 5 unités. Les conditions nécessaires deviennent :

$$L'_q = 12 - 3q - \ell = 0$$

$$L'_\ell = 5 - q = 0$$

on a donc $q = 5$ et $\ell = -3 < 0$.

Avec deux variables, l'analyse reste équivalente sur chaque contrainte.

B. Contrainte de non-négativité

La contrainte porte quelquefois sur la non-négativité de la variable x . On la note $x \geq 0$. Écrivons le lagrangien tenant compte de cette nouvelle contrainte :

$$L^n = f(x) + \ell(X - g(x)) + \lambda x$$

où λ est le multiplicateur associé à $x \geq 0$. Les conditions nécessaires sont :

$$L''_x = f'(x) - \ell g'(x) + \lambda = 0$$

$$\lambda \geq 0, \lambda x = 0$$

$$\ell \geq 0, \ell(X - g(x)) = 0$$

Des deux premières conditions, on a :

$$\lambda = -(f'(x) - \ell g'(x)) \geq 0$$

On peut donc résumer ces conditions plus simplement à partir du lagrangien initial (1.10). On obtient les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker particularisées :

Théorème 1.15 (Kuhn et Tucker particularisé). *S'il existe une contrainte de non-négativité sur la variable x , $x \geq 0$, alors les conditions nécessaires sont :*

$$L'_x = f'(x) - \ell g'(x) \leq 0$$

$$xL'_x = 0$$

$$\ell \geq 0, \ell(X - g(x)) = 0$$

L'intuition est que s'il n'existe pas de solution strictement positive maximisant L , le lagrangien est nécessairement décroissant pour des valeurs strictement positives de la variable x , soit $L'_x < 0$, de sorte que le maximum de L se trouve bien en $x = 0$.

Exemple : Dans le cas du producteur, les conditions nécessaires s'écrivent :

$$L'_q = 12 - 3q \leq 0$$

$$q(12 - 3q) = 0$$

Si on prend $q = 0$, on obtient que la première condition n'est pas satisfaite puisque $12 > 0$. Autrement dit, le profit est croissant pour des productions juste supérieures à 0. Dès lors, pour que la seconde condition soit respectée, il faut $q = 4$.

Lorsque la solution est effectivement $x_c = 0$, on parle de solution en coin. Le terme « coin » signifie que la solution vient buter sur la valeur admissible la plus basse (ici 0) de la variable x . On développe ce point maintenant.

C. Contraintes, solution intérieure et solution en coin

La notion de coin est aussi pertinente pour une valeur maximale à ne pas dépasser pour x . Dans le problème développé au paragraphe 1.4.1, le producteur parvenait à une solution en coin quand la contrainte était saturée, puisque avec $x_c = X$, la variable x prenait la valeur la plus élevée possible.

Plus généralement, une solution en coin peut émerger si la variable x est contrainte simultanément par une valeur inférieure et une valeur supérieure, ce qu'on formule comme suit : $\bar{x} \geq x \geq \underline{x}$. Cela permet de définir les notions suivantes.

Définition 1.15. (Solution en coin/intérieure). *La solution x_c du problème est dite en coin si : $x_c = \bar{x}$ ou $x_c = \underline{x}$.*

La solution est dite intérieure si $\bar{x} > x_c > \underline{x}$

La résolution est alors similaire aux développements que l'on a effectués jusqu'à présent, et on peut présenter le résultat suivant :

Théorème 1.16 (Kuhn et Tucker et solution en coin). *La solution en coin du problème de maximisation est :*

$$x_c = \begin{cases} \bar{x} & \text{si } L'_x \geq 0 \\ \underline{x} & \text{si } L'_x \leq 0 \end{cases}$$

Si le lagrangien L est une fonction croissante alors son maximum est la solution en coin \bar{x} , c'est-à-dire la valeur maximale que peut prendre la variable x . Si L est décroissant, la solution en coin \underline{x} constitue le maximum recherché.

Ce raisonnement reste valable pour un problème à deux variables. Il suffit de raisonner sur le signe de la dérivée partielle du lagrangien par rapport à chacune des variables, $L'_{x_i}, i = 1, 2$.

1.5.2 Dualité

Le lagrangien permet de faire apparaître la notion de dualité, c'est-à-dire la possibilité de faire émerger une équivalence ou une symétrie permettant d'aborder un problème d'optimisation donné d'une autre manière. Pour cela, définissons le concept de point-col du lagrangien.

Définition 1.16. (Point-Col du lagrangien). *On appelle point-col ou point-selle du lagrangien $L(x, \ell)$, le couple (x_c, ℓ_c) , tel que*

$$L(x_c, \ell) \geq L(x_c, \ell_c) \geq L(x, \ell_c), \quad \forall x, \quad \forall \ell \geq 0$$

Un point-col du lagrangien est donc tel que :

- x_c maximise $L(x, \ell_c)$ pour x satisfaisant $X - g(x) \geq 0$
- ℓ_c minimise $L(x_c, \ell)$ pour $\ell \geq 0$

On appelle ce point col ou selle car en représentant graphiquement le lagrangien, il forme une sorte de selle de cheval ou de col de montagne (cf. : figure 1.18).

Soit l'ensemble $\mathcal{E}_c = \{x \text{ tels que } X - g(x) \geq 0\}$ contenant l'ensemble des valeurs de x telles que la contrainte $X - g(x) \geq 0$ soit satisfaite.

Dans le cas où f est concave et g convexe, on peut alors énoncer le théorème (non démontré) de caractérisation des points-cols suivant :

Théorème 1.17 (Point-col). *Si $x_c \in \mathcal{E}_c$ et $\ell_c \geq 0$, le couple (x_c, ℓ_c) est un point-col pour $L(x, \ell)$ si et seulement si*

- $x_c \in \arg \max_{x \in \mathcal{E}_c} L(x, \ell_c)$
- $X - g(x_c) \geq 0$
- $\ell_c (X - g(x_c)) = 0$

On voit apparaître le caractère nécessaire des conditions de Kuhn et Tucker dans la détermination du point-col. Paradoxalement, cela veut dire que si les conditions

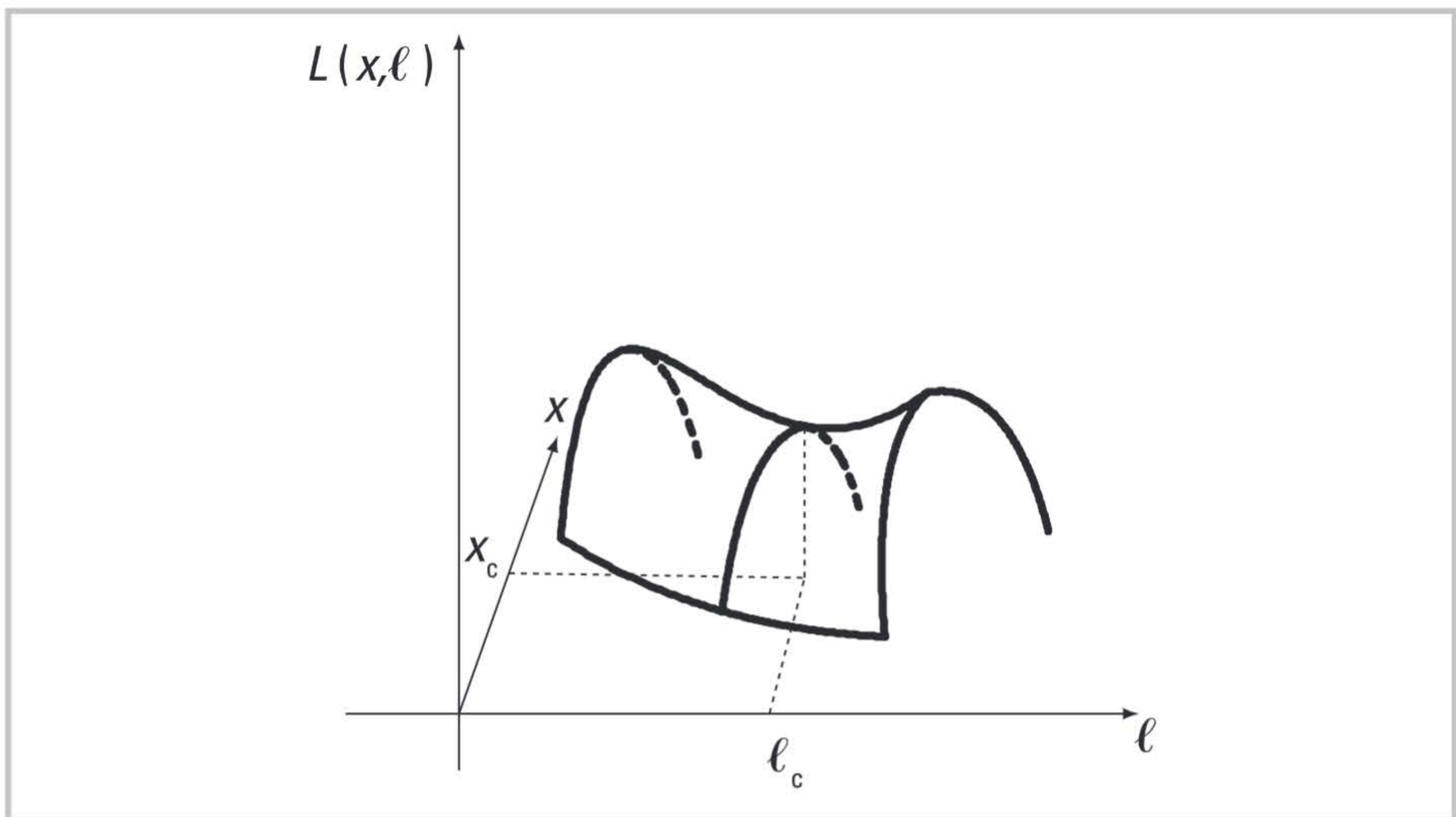


FIGURE 1.18
Point-col ou selle

de Kuhn et Tucker sont vérifiées et f concave et g convexe, elles permettent de déterminer la solution du problème de minimisation impliqué dans la définition du point-col (1.16), soit

$$\min_{\ell \geq 0} L(x_c, \ell)$$

Cette remarque ouvre la voie à la notion de dualité. En effet, l'écriture des conditions de point-col permettent de faire apparaître une équivalence entre la recherche du maximum du programme initial Ps_6 et la recherche d'un multiplicateur minimisant le lagrangien associé à Ps_6 . Cette équivalence ou cette symétrie est appelée structure de dualité ou propriété de dualité lagrangienne.

On en déduit que le problème initial Ps_6 peut aussi être résolu si on sait déterminer un point-col du lagrangien, c'est-à-dire, si on prend en compte simultanément les deux problèmes

$$\max_x L(x, \ell) \text{ et } \min_{\ell \geq 0} L(x, \ell)$$

À ce stade, il est donc possible de considérer le problème D

$$\min_{\ell \geq 0} \left\{ \max_{x \in \mathcal{E}_c} L(x, \ell) \right\}$$

ou encore en introduisant la fonction dite duale $W(\ell) = \max_{x \in \mathcal{E}_c} L(x, \ell)$,

$$\begin{cases} \min_{\ell} W(\ell) \\ \ell \geq 0 \end{cases}$$

Le problème D est alors appelé dual du problème Ps_6 , lui même alors dénommé primal.

On arrive à la conclusion que résoudre le dual permet aussi de déterminer un point-col du lagrangien et donc de trouver la solution du primal. Cette idée est présentée dans le tableau des correspondances suivant :

Conditions du point-col	$\max_{x \in \mathcal{E}_c} L(x, \ell)$ \Updownarrow	$\min_{\ell \geq 0} L(x, \ell)$ \Updownarrow
Conditions nécessaires	$(I): L'_x(x_c, \ell) = 0$	$(II): \begin{cases} L'_\ell(x, \ell_c) \geq 0 \\ \ell_c L'_\ell(x, \ell_c) = 0 \end{cases}$
Problèmes	$\Updownarrow + (II)$ $Ps_6 \begin{cases} \max_x f(x) \\ X - g(x) \geq 0 \end{cases}$	$\Updownarrow + (I)$ $D \begin{cases} \min_{\ell} W(\ell) = \max_{x \in \mathcal{E}_c} L(x, \ell) \\ \ell \geq 0 \end{cases}$
	PRIMAL	DUAL

En résumé, les conditions nécessaires (II) fournissent les valeurs possibles du multiplicateur ℓ pour le programme $\max_x L$ et entrent dans celles de Kuhn et Tucker appliquées à Ps_6 . Inversement, les conditions nécessaires (I) fournissent les valeurs possibles de x pour le programme $\min_\ell L$ et entrent dans celles de Kuhn et Tucker particularisées appliquées à D .

Ce constat peut se généraliser à plusieurs variables et plusieurs contraintes. Dans ce cas, à tout problème primal, on peut associer un problème dual en introduisant la fonction duale $W(\ell)$ convexe. Les variables x sont alors appelées les n variables primales et les variables ℓ , les m variables duales. Évidemment, à l'optimum du problème dual, les valeurs des m variables duales correspondent exactement aux valeurs optimales des multiplicateurs de Kuhn et Tucker du primal.

D'un point de vue pratique, remarquons qu'à un programme primal contenant n variables primales et m contraintes correspond un programme dual libre à m variables duales non négatives. Il est donc très avantageux de passer par la résolution du dual lorsque le nombre de contraintes est élevé.

Le cas du producteur : Pour le producteur maximisant la fonction de profit $\pi(q)$ sous la contrainte $q \leq S$, le lagrangien se note :

$$L = \pi(q) + \ell(S - q)$$

et la condition nécessaire, $\pi'(q) - \ell = 0$, permet d'exprimer la quantité en fonction du multiplicateur, soit $q = \pi'^{-1}(\ell) = r(\ell)$, où π'^{-1} est la fonction réciproque de π' . Ainsi la fonction duale s'écrit

$$W(\ell) = \pi(r(\ell)) + \ell(S - r(\ell))$$

Exemple : Si la fonction de profit prend comme expression $\pi_e(q) = 12q - \frac{3}{2}q^2 - 12$ et que la réserve de minerai est telle que $S = 3$, alors $W(\ell) = 12 - \ell + \frac{\ell^2}{6}$. Cette fonction convexe, puisque $W''(\ell) = \frac{1}{3} > 0$, atteint bien son minimum pour $\ell = 3$, qui est la valeur du multiplicateur déterminée dans le paragraphe 1.4.1. En effet, $W'(\ell)$ étant égal à $-1 + \frac{\ell}{3}$, on vérifie que $W'(3) = -1 + \frac{3}{3} = 0$.

1.5.3 Difficultés dans la résolution

A. Principe de la contrainte supplémentaire

Partons du fait que la solution du problème Ps_6 est la solution contrainte x_c . Notons \mathcal{E}_c l'ensemble tel que la variable x satisfait la contrainte $g(x) \leq X$. Rajoutons à ce problème une contrainte supplémentaire, notée $m(x) \geq 0$, de sorte que, pour satisfaire cette nouvelle contrainte, x doit appartenir à l'ensemble $\hat{\mathcal{E}}_c$ forcément inclu dans le précédent \mathcal{E}_c .

Le problème $\max_x f(x)$ s/c $x \in \hat{\mathcal{E}}_c$ admet alors une fonction valeur $f(\hat{x}_c)$ telle que

$$f(\hat{x}_c) \leq f(x_c)$$

Autrement dit, si l'on ajoute une contrainte supplémentaire à un problème, la valeur maximum de la fonction objectif ne peut *pas s'accroître*.

En effet, si la nouvelle contrainte n'est pas saturée pour la solution x_c , c'est-à-dire si $m(x_c) > 0$, on a $x_c \in \hat{\mathcal{E}}_c$ et la contrainte qui influence la solution reste $g(x) \leq X$. Le maximum recherché demeure x_c . Ainsi, on trouve que $\hat{x}_c = x_c$ et donc $f(\hat{x}_c) = f(x_c)$.

En revanche, si avec la solution du problème initial Ps_0 , la contrainte supplémentaire est violée, $m(x_c) < 0$, alors cela signifie que x_c n'est maintenant plus accessible ($x_c \notin \hat{\mathcal{E}}_c$). Il faut donc se rabattre sur une valeur de x , \hat{x}_c , moins intéressante que x_c telle que la nouvelle contrainte est saturée, soit $m(\hat{x}_c) = 0$ et $f(\hat{x}_c) < f(x_c)$.

B. Signe du multiplicateur

Deux points sont à distinguer.

- Il existe une situation (et une seule) pour laquelle le multiplicateur est nul et la contrainte est simultanément saturée. Elle apparaît lorsque $X = g(x^*)$. Ainsi, on est contraint par X juste au moment où l'on atteint la valeur la plus intéressante de x , x^* . Il va de soi qu'en dépit de la saturation de la contrainte, le coût marginal qui y est associé est nul car on obtient la solution non contrainte.

Exemple : Examinons la situation du producteur de ressources non-renouvelables. Dans ce cas, la contrainte est simplement $g(q) = q$. Supposons qu'il fait face à un gisement de taille égale à 4. Les conditions nécessaires sont :

$$\begin{aligned} L'_q &= 12 - 3q - \ell = 0 \\ \ell &\geq 0, \ell(4 - q) = 0 \end{aligned}$$

En posant $\ell = 0$, on a $q = 4$ de la première condition nécessaire. La contrainte est donc saturée, mais le prix implicite de la contrainte est nul car le résultat obtenu correspond à celui de l'optimisation libre.

- Le signe positif de ℓ dans les conditions d'exclusion est directement lié à la façon dont est écrit le lagrangien. Pour le montrer, écrivons-le sous la forme

$$L = f(x) - \ell(X - g(x))$$

Le signe pertinent du multiplicateur serait alors négatif car $V'(X) = -\ell$, c'est-à-dire que l'accroissement de la valeur maximum proviendrait d'un multiplicateur non positif. La convention adoptée et conservée par la suite est de poser les contraintes sous la forme « supérieur ou égal à zéro » et de faire figurer le signe « plus » devant le multiplicateur.

Exemple : Écrivons le lagrangien associé au problème du producteur de la façon suivante lorsque $S = 3$:

$$L = 12q - \frac{3}{2}q^2 - 12 - \ell(3 - q)$$

À l'exception de celle portant sur le signe de ℓ , les conditions nécessaires sont :

$$\begin{aligned} L'_q &= 12 - 3q + \ell = 0 \\ \ell(3 - q) &= 0 \end{aligned}$$

On sait d'ores et déjà que le cas où $\ell = 0$ est impossible car la contrainte est saturée. Comme $q = 3$, on trouve que $\ell = -3$. On vérifie que $V'(X) = -\ell = -(-3) = 3$, donc que l'accroissement de la fonction objectif suite à un desserrement de la contrainte est bien positif. La condition d'exclusion doit donc être complétée par $\ell \leq 0$.

Remarque : Si au lieu d'un problème de maximisation, on devait résoudre un problème de minimisation de la fonction f sous la contrainte, les conditions nécessaires devraient être légèrement modifiées. En conservant le libellé actuel du lagrangien, le premier point de la condition d'exclusion serait $\ell \leq 0$. En effet, désormais le multiplicateur ne doit refléter que des diminutions (variations négatives) de la fonction objectif et non le contraire si l'on recherche un minimum. De manière alternative, il est aussi possible de conserver la condition $\ell \geq 0$ si on modifie l'écriture du lagrangien en posant $L = f(x) - \ell(X - g(x))$.

Les conclusions restent valides dans le cas à deux variables et deux contraintes. Il suffit d'appliquer le raisonnement à chacune des contraintes. Elles peuvent être étudiées par le lecteur à titre d'exercice.

C. Existence d'une solution

Jusqu'à présent, on a supposé que la solution des problèmes étudiés existait. Or, ce n'est pas toujours le cas. C'est pourquoi, certains mathématiciens se sont centrés sur l'établissement de conditions d'existence d'une solution à un problème d'optimisation. Elles sont connues sous le nom de théorème de Weierstrass. Avant de le présenter, on doit préciser (intuitivement) une notion supplémentaire sur les ensembles.

Définition 1.17. (Ensemble compact). *Un ensemble est compact dès lors qu'il contient sa frontière et qu'on peut lui trouver un minorant et un majorant.*

Exemple : L'ensemble $\Pi = [-12, 12]$ est un ensemble qui contient sa frontière constituée par ses bornes inférieures et supérieures. Par ailleurs, il contient un de ses minorants, -12 , et un de ses majorants, 12 . Il est donc compact.

Présentons le théorème :

Théorème 1.18 (Théorème de Weierstrass). *Soit \mathcal{E} un ensemble compact et f une fonction continue de \mathcal{E} dans \mathcal{F} , alors f atteint sa borne supérieure, son maximum, et sa borne inférieure, son minimum, c'est-à-dire que il existe x^* et x^{**} de \mathcal{E} tels que :*

$$f(x^*) \geq f(x) \geq f(x^{**})$$

En se centrant sur le maximum, l'intuition de ce théorème est que si l'ensemble \mathcal{E} est compact alors il a un majorant et la continuité de la fonction transmet la compacité de \mathcal{E} à \mathcal{F} , l'ensemble des images. Ainsi donc, on peut déterminer avec certitude au moins un maximum dans \mathcal{F} .

1.6 PROGRAMMATION LINÉAIRE

1.6.1 Présentation

Si la fonction objectif est linéaire au même titre que les contraintes, on rencontre un problème particulier de l'optimisation que l'on nomme la programmation linéaire. Soit la fonction objectif :

$$f(x_1, x_2) = f_1 x_1 + f_2 x_2$$

et les contraintes :

$$X - g(x_1, x_2) = X - a_{11}x_1 - a_{12}x_2$$

$$\xi - \gamma(x_1, x_2) = \xi - a_{21}x_1 - a_{22}x_2$$

où les coefficients $f_j, a_{ij}, i, j = 1, 2$ sont des constantes positives.

On peut démontrer alors qu'une solution au problème existe en utilisant à nouveau les courbes de niveau. La particularité d'une courbe de niveau d'une fonction objectif linéaire est d'être linéaire. En effet, la courbe de niveau

$$\mathcal{C}_k = \{(x_1, x_2) \text{ tels que } f(x_1, x_2) = k\}$$

débouche sur l'équation

$$x_2 = \frac{k}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} x_1$$

qui est une droite de pente $-\frac{f_1}{f_2}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{k}{f_2}$. Les courbes de niveau sont donc des droites parallèles les unes par rapport aux autres et sont d'autant plus élevées que l'ordonnée à l'origine l'est.

Par conséquent, le principe de la recherche graphique de la solution est le même que dans le cas non linéaire. Il faut trouver le point de contact (et non plus de tangence) entre la courbe de niveau la plus élevée possible et l'ensemble des couples (x_1, x_2) réalisables. On a trois situations selon que la pente de la courbe de niveau \mathcal{C}_k est :

- moins forte que celle des contraintes, alors la solution est telle que $x_{1_c} = 0$ et $x_{2_c} > 0$ (cas 1) ;
- comprise entre les pentes des deux contraintes, la solution débouche sur $x_{1_c} > 0$ et $x_{2_c} > 0$ (cas 2) ;
- plus forte que celles des contraintes, alors la solution vérifie $x_{1_c} > 0$ et $x_{2_c} = 0$ (cas 3).

On illustre ces trois cas dans la figure 1.19, pour laquelle l'aire la plus grise constitue les couples (x_1, x_2) accessibles.

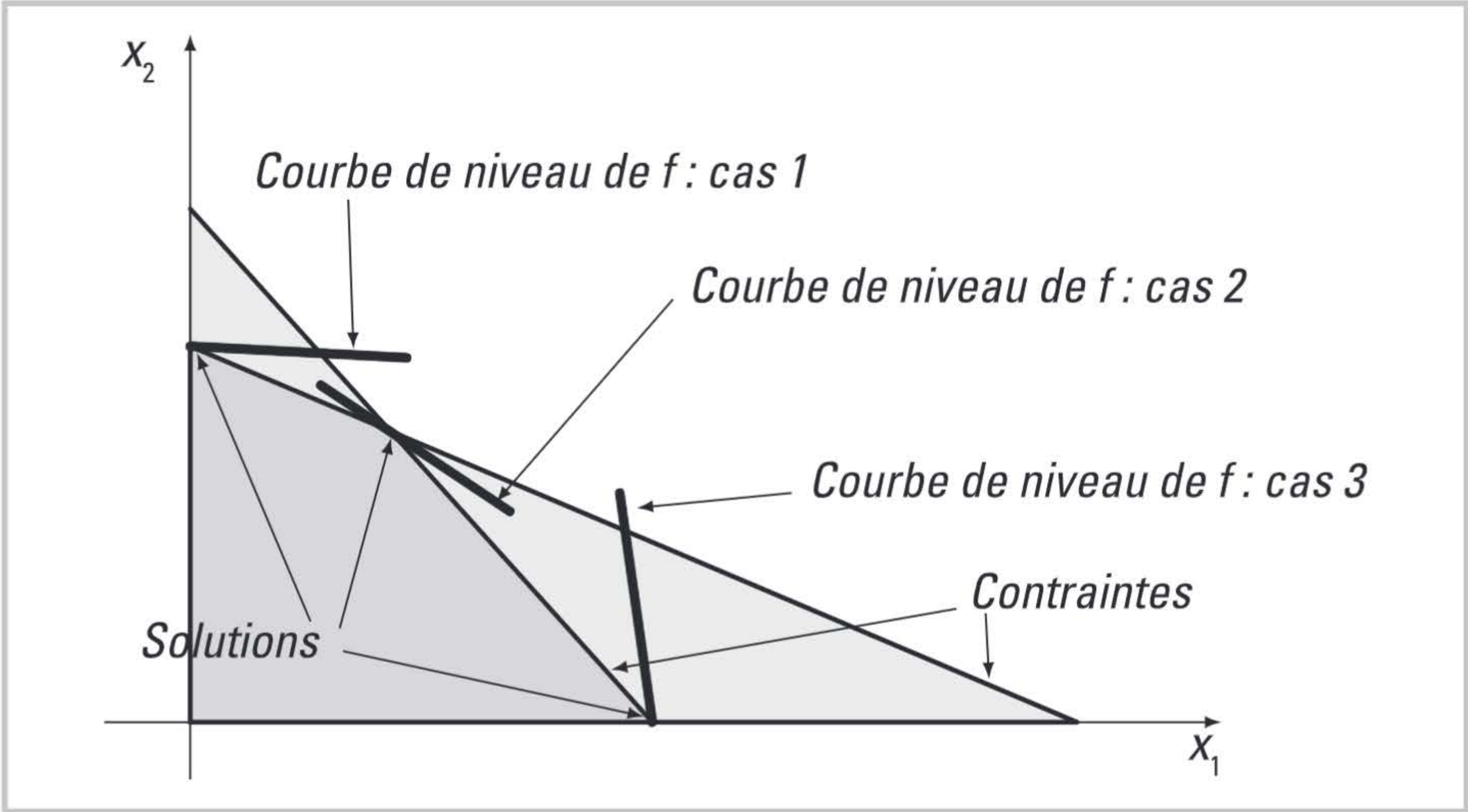


FIGURE 1.19
Les trois types de solution pour la programmation linéaire

Exemple : Considérons que le profit du producteur est de 9 sur chaque unité de bien 1 vendue et de 12 pour le bien 2. La fonction objectif se note : $\pi_{a_i} = 9q_1 + 12q_2$. Dans le cas où les niveaux des contraintes sont $S = 6$ pour le minerais et $K = 4,5$ pour le stockage, il est possible de montrer graphiquement que la solution se situe à l'intersection des deux contraintes. Celles-ci sont donc saturées simultanément et la solution est $q_{1_c} = 3$ et $q_{2_c} = 1,5$. Le profit obtenu est de 45.

Concernant la dualité au sein de la programmation linéaire, il existe une symétrie parfaite entre problème primal et dual. On a :

Primal	Dual
$\max_{x_1, x_2} f_1 x_1 + f_2 x_2$	$\min_{\ell, \lambda} X\ell + \xi\lambda$
$s/c \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq X$	$s/c \ a_{11}\ell + a_{21}\lambda \geq f_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq \xi$	$a_{12}\ell + a_{22}\lambda \geq f_2$

Il apparaît clairement que si le problème primal contient plus de deux variables mais simplement deux contraintes, la résolution du problème dual peut se faire simplement à l'aide d'un graphique à deux dimensions.

Exemple : En reprenant l'exemple ci-dessus, on a :

$\max_{q_1, q_2} 9q_1 + 12q_2$	$\min_{\ell, \lambda} 6\ell + 4,5\lambda$
$s/c \ q_1 + 2q_2 \leq 6$	$s/c \ \ell + \lambda \geq 9$
$q_1 + q_2 \leq 4,5$	$2\ell + \lambda \geq 12$

La solution est $\ell_c = 3$ et $\lambda_c = 6$. Comme les multiplicateurs sont positifs, cela confirme que les deux contraintes sont saturées à l'optimum. Ainsi, si la contrainte sur le minéral (resp. sur le stockage) se desserrait le supplément de profit supplémentaire obtenu serait de 3 (resp. 6).

1.6.2 Méthode du simplexe

Bien que l'on puisse trouver la solution des problèmes de programmation linéaire à l'aide du théorème 1.9, paragraphe 1.4.2, la résolution peut aussi se faire à l'aide de la méthode du simplexe, qui repose sur un algorithme permettant de passer d'un sommet du polyèdre formé par les contraintes à un autre, chaque fois qu'un accroissement de la fonction objectif est possible. L'algorithme prend fin lorsque le sommet le plus profitable est atteint.

Reprenons l'exemple évoqué ci-dessus pour expliquer la méthode de résolution :

$$\begin{aligned} &\max 9q_1 + 12q_2 \\ &s/c : q_1 + 2q_2 \leq 6 \\ &\quad q_1 + q_2 \leq 4,5 \end{aligned}$$

Partons de l'idée que la production est nulle. Donc le profit l'est aussi. Il est évident alors que produire au moins un des deux biens augmente ce dernier. Puisque $12 > 9$, il semble plus intéressant de produire en priorité le bien 2. La première contrainte se saturant avant la seconde, 6 unités de minéral sont consacrées à la production de $2q_2$ unités, ce qui indique que $q_2 = 3$. Le producteur obtient un profit de 36 et il reste 1,5 unité de stockage non utilisée dans la deuxième contrainte.

Examinons la rentabilité de la production d'une unité de bien 1. Dans la première contrainte, on voit qu'il faut réduire la production du bien 2 de 0,5 unité, sinon cette contrainte est violée. Donc, fabriquer une unité de bien 1 fait gagner 9, mais fait perdre $0,5 \times 12 = 6$ suite à cette réduction d'une demi-unité. Le gain net est donc de $9 - 6 = 3 > 0$. Produire le bien 1 est ainsi profitable.

Quelle quantité fabriquer et quelles sont les conséquences sur celle du bien 2 ? Dans la deuxième contrainte, on observe qu'en réduisant de $\frac{1}{2}$ unité la production du bien 2, on peut augmenter de 0,5 unité celle du bien 1 tout en respectant cette contrainte. Comme on peut allouer les 1,5 unités de stockage restantes à la fabrication

du bien 1, on produit $\frac{1,5}{0,5} = 3$ unités de bien 1. Il n'est donc possible de produire que **1,5** unité de bien 2 et le profit maximum est de **45**.

La particularité de la méthode du simplexe est de proposer des tableaux faisant apparaître toutes les valeurs clés que l'on vient de faire apparaître en gras. La méthode suppose de caractériser tous les sommets de l'ensemble des productions possibles, puis de choisir parmi ceux-ci celui qui donne à f la plus grande valeur. Pour cela, il faut procéder en plusieurs étapes.

Étape 1 : elle consiste à transformer le système d'inéquations linéaires formé par les contraintes en un système d'équations linéaires. Pour cela, il suffit de rajouter de nouvelles variables de décisions auxiliaires, dites d'écart, comblant l'écart potentiel entre la combinaison technique des variables initiales, dites primales, et la quantité de ressource disponible dans chacune des contraintes.

Le problème à résoudre est donc :

$$\max f(x_1, x_2) = f_1 x_1 + f_2 x_2$$

sous les contraintes :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = X$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = \xi$$

Étape 2 : elle vise à désigner un sommet du système d'équations linéaires comme solution. Le plus simple est de donner une valeur nulle aux variables primales, $x_1 = x_2 = 0$, dites hors base, ce qui donne immédiatement la valeur des variables d'écart, $x_3 = X$ et $x_4 = \xi$, dites de base. On en déduit que la fonction objectif est nulle, $f(x_1, x_2) = 0$.

Étape 3 : elle a pour but de résumer cette solution dans un tableau. Cela donne :

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	a_{11}	a_{12}	1	0	X
x_4	a_{21}	a_{22}	0	1	ξ
f	f_1	f_2	0	0	0

La première ligne recense l'ensemble des variables $x_j, j = 1, \dots, 4$. La première colonne désigne les variables de base et la fonction objectif, tandis que leurs valeurs respectives associées à cette solution apparaissent dans la dernière colonne. Les éléments restants rappellent les coefficients affectant les variables dans chaque équation du système linéaire et dans la fonction objectif.

Il est important pour la suite de constater que les colonnes associées aux variables de base sont composées de 0 et de 1. C'est grâce à cela que l'on identifie dans ce tableau que x_3 vaut X et x_4 vaut ξ .

Étape 4 : en partant du constat très simple que si x_1 ou x_2 remplace dans la base soit x_3 , soit x_4 , la fonction objectif sera plus élevée que sa valeur actuelle (qui est nulle rappelons-le), cette étape consiste à choisir la variable hors base entrante et la variable de base sortante, puis à en étudier les conséquences sur le système. Cela se passe selon les phases suivantes :

Phase 1 : choix de l'entrée dans la base. Le critère est fort simple : puisque l'on cherche à maximiser f , on fait entrer la variable primale dont le coefficient f_j est le plus élevé. Supposons que cela soit f_1 , la variable x_1 entre.

Phase 2 : choix de la sortie de la base. La variable d'écart sortante est celle associée au $\min\left\{\frac{X}{a_{11}}, \frac{\xi}{a_{21}}\right\}$ car ce minimum indique la contrainte qui sature en premier suite à l'entrée de la variable x_1 .

Supposons que $\frac{X}{a_{11}} < \frac{\xi}{a_{21}}$, c'est donc la variable x_3 qui sort de la base.

Phase 3 : étude des conséquences de l'entrée-sortie. La variable x_1 entrant à la place de x_3 dans la première contrainte, cela désigne le coefficient a_{11} comme le pivot du système, c'est-à-dire que tous les changements vont s'articuler autour de lui. Conformément au nouveau statut de variable de base de x_1 , il faut faire apparaître un 1 à la place de a_{11} , et des 0 sur toutes les cellules restantes de cette colonne. On va donc remplacer a_{11} par $\frac{a_{11}}{a_{11}} (= 1)$, a_{21} par $a_{21} - a_{21} \frac{a_{11}}{a_{11}} (= 0)$ et f_1 par $f_1 - f_1 \frac{a_{11}}{a_{11}} (= 0)$.

En vertu du théorème suivant (non démontré), on est en mesure de prendre en compte toutes les conséquences sur le système de cette entrée-sortie

Théorème 1.19 *Deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre en appliquant successivement les règles i) et ii) suivantes :*

- i) *on multiplie les deux membres d'une équation par un réel non nul,*
- ii) *on remplace une équation par la somme d'elle même et d'une autre équation.*

et on obtient le tableau :

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	$\frac{a_{11}}{a_{11}}$	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	0	$\frac{X}{a_{11}}$
x_4	$a_{21} - a_{21} \frac{a_{11}}{a_{11}}$	$a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-a_{21} \frac{1}{a_{11}}$	1	$\xi - a_{21} \frac{X}{a_{11}}$
f	$f_1 - f_1 \frac{a_{11}}{a_{11}}$	$f_2 - f_1 \frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-f_1 \frac{1}{a_{11}}$	0	$-f_1 \frac{X}{a_{11}}$

ce qui après simplifications donne

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	0	$\frac{x}{a_{11}}$
x_4	0	$a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-a_{21} \frac{1}{a_{11}}$	1	$\xi - a_{21} \frac{x}{a_{11}}$
f	0	$f_2 - f_1 \frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-f_1 \frac{1}{a_{11}}$	0	$-f_1 \frac{x}{a_{11}}$

Par lecture du tableau, on a donc que suite à l'entrée-sortie, $x_1 = \frac{x}{a_{11}}$, $x_4 = \xi - a_{21} \frac{x}{a_{11}}$ et la fonction objectif vaut l'opposé de $-f_1 \frac{x}{a_{11}}$.

Faut-il faire entrer la variable x_2 ? La réponse est positive si $f_2 - f_1 \frac{a_{12}}{a_{11}} > 0$, qui mesure alors le nouveau bénéfice associé à la variable x_2 . Son entrée dans la base va donc accroître la fonction f . Si tel est le cas, il faut réitérer le processus des phases 1-3. Sinon, la solution est trouvée.

Enfin, une fois le processus terminé, la dernière cellule des colonnes associées aux variables d'écart indiquent l'opposé des prix fictifs de chaque contrainte. Dans l'hypothèse où $f_2 - f_1 \frac{a_{12}}{a_{11}} < 0$, on aurait donc que le prix fictif associé à la contrainte saturée (la première) serait égal à $f_1 \frac{1}{a_{11}}$.

Exemple : L'étape 1 débouche sur la réécriture suivante du problème :

$$\begin{aligned} \max & 9q_1 + 12q_2 \\ s/c : & q_1 + 2q_2 + q_3 = 6 \\ & q_1 + q_2 + q_4 = 4,5 \end{aligned}$$

Les étapes 2 et 3 aboutissent au tableau suivant :

	q_1	q_2	q_3	q_4	
q_3	1	2	1	0	6
q_4	1	1	0	1	4,5
f	9	12	0	0	0

La phase 1 de l'étape 3 consiste à remarquer que 12 est supérieur à 9. Il faut donc faire entrer dans la base la variable q_2 . La phase 2 vise à trouver le $\min\left\{\frac{6}{2}, \frac{4,5}{1}\right\} = \frac{6}{2} = 3$. La variable q_3 sort ainsi de la base. La phase 3 identifie la valeur 2 située à l'intersection de la ligne q_3 et de la colonne q_2 comme le pivot. Les conséquences apparaissent dans le tableau suivant :

	q_1	q_2	q_3	q_4	
q_2	0,5	1	0,5	0	3
q_4	0,5	0	-0,5	1	1,5
f	3	0	-6	0	-36

Comme le gain net associé à q_1 est égal à $3 > 0$, on réitère donc les phases 1-3. La variable q_1 entre. Le $\min\left\{\frac{3}{0,5}, \frac{1,5}{0,5}\right\} = 3$ et ainsi la variable q_4 sort de la base. Conformément à la phase 3, 0,5 est le nouveau pivot. Les changements sont les suivants :

	q_1	q_2	q_3	q_4	
q_2	0	1	1	-1	1,5
q_1	1	0	-1	2	3
f	0	0	-3	-6	-45

On retrouve donc les valeurs optimales de q_1 et q_2 et du profit (au signe près) dans la dernière colonne, ainsi que celles (au signe près) des prix fictifs associés aux contraintes sur la dernière ligne.

1.7 APPLICATIONS

On présente ici un ensemble de problèmes d'économie et de gestion usuels qui utilisent l'optimisation statique comme moyen de faire émerger des règles de décision et de les analyser. Afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté avec les développements précédents, les solutions optimales seront repérées à l'aide du symbole $*$, même s'il s'agit d'un problème contraint. Par ailleurs, on n'étudie que les conditions nécessaires et laissons le soin au lecteur de vérifier les conditions suffisantes. Enfin, pour favoriser l'implication du lecteur dans la compréhension des calculs, les conditions nécessaires seront présentées sans renvoi au théorème auquel elles se réfèrent.

1.7.1 Fonctions de l'entreprise

L'activité d'une même entreprise est répartie au sein de diverses fonctions. Celles-ci recouvrant des réalités très différentes, étudions certaines en mettant en avant les aspects relevant de l'optimisation.

A. Gestion de stocks

Le modèle de base de gestion des stocks (Wilson, 1934) retrace de manière simplifiée, la méthodologie à suivre pour déterminer le volume ainsi que la date de commande pour gérer un stock.

Durant une période de référence donnée, disons le jour, une entreprise qui fabrique un produit doit acheter et stocker un bien intermédiaire non périssable dans un point de stockage unique. La commande est livrée sans aucun délai. Chaque jour $t \geq 1$, le taux de demande est supposé connu et constant égal à $v > 0$ unités. Si $x \geq 0$ est la quantité commandée du bien intermédiaire, alors celle-ci permet à l'entreprise de servir la demande pendant $T = \frac{x}{v}$ jours (la durée du cycle de stockage). L'entreprise supporte des coûts répartis en :

- coût d'acquisition ou d'achat $C_a(x) = ax + k$ où $a \geq 0$ est le prix unitaire d'achat et $k \geq 0$ un coût fixe de transaction par commande ;
- coût de détention du stock, évalué à $C_d(x) = h \sum_{t=1}^T (x - vt)$ où h est le coût par unité de temps t du fait de devoir détenir $x - vt$ unités dans le stock. En se rappelant que la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1 est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, on obtient que $C_d(x) = h \frac{x(x-v)}{2v}$.

Le coût total de la commande est donc $C(x) = C_a(x) + C_d(x)$. Cette commande permettant d'alimenter le stock pendant T jours, le coût de stockage pour la durée du cycle de stockage, ou coût moyen de stockage, devient

$$C_M(x) = \frac{1}{T} [C_a(x) + C_d(x)] = av + v \frac{k}{x} + h \frac{x-v}{2}$$

Le gestionnaire de stock fait donc face à un problème d'optimisation libre $\min_x C_M(x)$ consistant à choisir le volume de commande x^* minimisant le coût moyen de stockage. En réécrivant le problème

$$\max_x (-C_M(x))$$

la condition nécessaire implique (en sélectionnant la solution positive)

$$\frac{vk}{x^2} - \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt{\frac{2kv}{h}}$$

Pour analyser la politique optimale, il est utile de noter que le coût d'acquisition moyen, $av + v \frac{k}{x}$, décroît avec x , tandis que le coût de détention moyen, $h \frac{x-v}{2}$, croît. L'optimum consiste donc à égaliser les coûts marginaux d'acquisition et de détention. L'exercice de statique comparative sur les paramètres (k, v, h) indique que la commande est croissante avec k et v , et décroissante avec h . Etant donné la forme du coût, on peut voir que l'opposée de la fonction de coût de stockage $-C_M(x)$ est super-modulaire pour les paramètres v et k , ce qui corrobore l'étude des variations de la solution optimale.

B. Gestion de production : programmation linéaire

Malgré des hypothèses somme toute restrictives, de nombreux problèmes de décisions sont modélisés de manière linéaire notamment pour permettre une plus grande opérationnalité des résultats (Dantzig, 1951). Cela est souvent le cas pour les questions de gestion de production visant à minimiser le coût de production ou encore à maximiser le profit.

Considérons une entreprise fabriquant un produit en deux versions : la version de base et la version de luxe. Le département comptabilité a analysé que la vente d'un produit de base permet de dégager un bénéfice net par unité de 30€, et que celle d'un produit de luxe rapporte 50€ pièce. Techniquement, l'entreprise est organisée en 2 ateliers spécialisés par version de produit. Ceux-ci diffèrent selon la capacité journalière de production et le procédé technique employé :

- l'atelier « Base » peut écouler 80 pièces par jour alors que l'atelier « Luxe » ne parvient à en fabriquer que 70 ;
- chaque type de produit nécessite une quantité différente d'un composant commun qui ne peut être livré qu'en quantité limitée à 800 unités par jour. Plus précisément, le produit de base n'incorpore que 6 unités du composant par produit alors que le produit de luxe en nécessite 8.

Le chef d'entreprise cherche à savoir quels volumes de chaque produit, il doit demander de fabriquer aux chefs d'atelier afin de maximiser son bénéfice net quotidien. En notant x_1 , la quantité de produit de base fabriquée par jour et x_2 , la quantité de produit de luxe par jour, le manager souhaite rendre maximal le bénéfice journalier soit $\pi = 30x_1 + 50x_2$ sous les contraintes de production

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 80 \\ 0 \leq x_2 \leq 70 \\ 6x_1 + 8x_2 \leq 800 \end{cases}$$

Le problème à résoudre est donc un problème de programmation linéaire.

Résolvons de manière graphique puis à l'aide de la méthode du simplexe.

Graphiquement, il faut commencer par repérer l'ensemble des productions admissibles. Pour cela, représentons sur la figure 1.20 les contraintes saturées (traits fins). Il est simple de démontrer que cet ensemble correspond alors à l'aire située sous ces contraintes. Pour détecter la solution qui maximise π , on trace les courbes de niveau de cette fonction, données par $x_2 = \frac{\pi}{50} - \frac{3}{5}x_1$. Elles correspondent à des droites (traits épais) dont on cherche l'ordonnée à l'origine, $\left(\frac{\pi}{50}\right)$, la plus élevée car on désire maximiser π , dans le domaine des admissibles. Celle-ci correspond à la droite de niveau telle que le point de contact entre cette courbe et l'ensemble des productions admissibles se fait à l'intersection des contraintes $x_2 = 70$ et $6x_1 + 8x_2 = 800$.

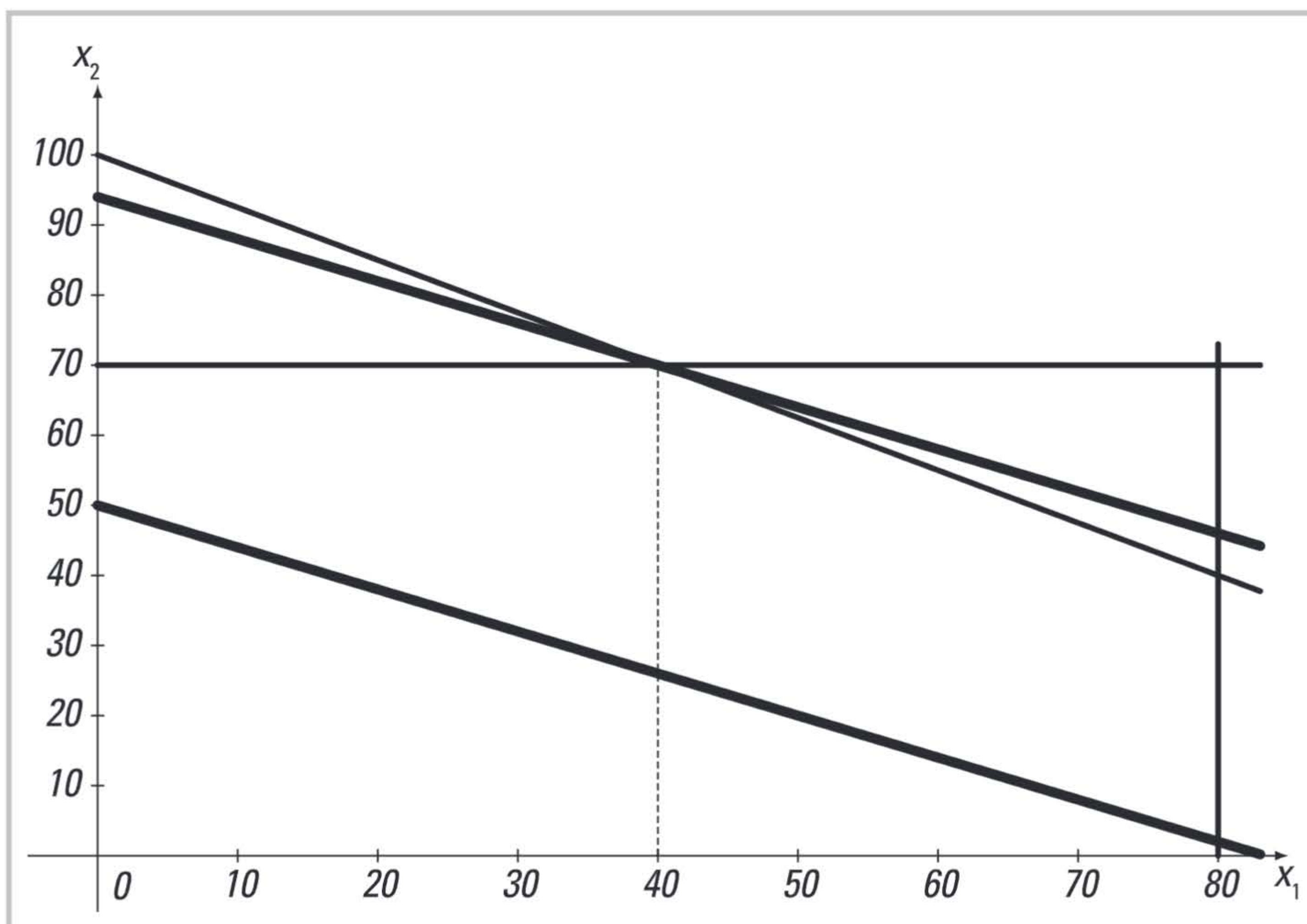


FIGURE 1.20
Solution graphique

Passons à la méthode du simplexe. Conformément à l'étape 1 du paragraphe 1.6.2, introduisons les variables d'écart x_3 , x_4 et x_5 dans le système de contraintes afin d'obtenir un système linéaire. On obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 80 \\ x_2 + x_4 = 70 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_5 = 800 \end{cases}$$

Le tableau initial associé aux étapes 2 et 3 est ainsi :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	0	0	80
x_4	0	1	0	1	0	70
x_5	6	8	0	0	1	800
f	30	50	0	0	0	0

- Phase 1 : la variable x_2 rentre dans la base car $50 > 30$.
- Phase 2 : la variable x_4 sort de la base car $\frac{70}{1} < \frac{800}{8} < \frac{80}{0} = \infty$
- Phase 3 : le pivot est donc la valeur 1 située à l'intersection de la ligne x_4 et de la colonne x_2 . Le calcul de la nouvelle base se fait autour de ce pivot, ce qui donne

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	0	0	80
x_2	0	1	0	1	0	70
x_5	6	0	0	-8	1	240
f	30	0	0	-50	0	-3 500

Comme le gain associé à l'entrée de la variable x_1 est positif puisqu'égal à 30, on réitère le processus des phases 1 à 3.

- Phase 1 : la variable x_1 rentre dans la base.
- Phase 2 : comme $\min\left\{\frac{80}{1}, \frac{70}{0}, \frac{240}{6}\right\} = 3$, x_5 sort de la base.
- Phase 3 : le pivot étant 6, la nouvelle base devient :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	$\frac{8}{6}$	$-\frac{1}{6}$	40
x_2	0	1	0	1	0	70
x_1	1	0	0	$-\frac{8}{6}$	$\frac{1}{6}$	40
f	0	0	0	-10	-5	-4 700

Le processus d'entrée prend fin.

La solution est donc $x_1^* = 40$, $x_2^* = 70$ et le profit maximum est 4 700. Par ailleurs, le prix fictif associé à la première contrainte est nul (puisque'elle est libre), celui associé à la seconde est de 10, et celui associé à la dernière est de 5. Ils correspondent au profit supplémentaire que l'entrepreneur obtiendrait s'il pouvait fabriquer 71 unités de bien Luxe au lieu de 70, et s'il disposait de 801 unités du composants commun au lieu de 800.

C. Gestion de trésorerie

Une entreprise disposant d'un excédent de trésorerie souhaite le faire fructifier en le plaçant entre différents actifs financiers, étant donné son désir de rentabilité mais aussi son attitude vis-à-vis du risque. Il est donc nécessaire d'optimiser la trésorerie entre les différentes alternatives de placements, de faire un choix de portefeuille (voir Brealey et alii, 2006). Pour apprécier le calcul économique sous-jacent, supposons que l'entreprise désire répartir sa trésorerie de R euros entre un actif sans risque de rendement en euros certain et 2 actifs risqués caractérisés par leur rendement aléatoire respectif en euros r_1 et r_2 . Ainsi si 1 € est placé dans l'actif 0, l'investissement rapportera r_0 € de manière certaine, alors que, placé dans l'actif 1 (resp. 2), il rapportera r_1 € (resp. r_2 €) avec une certaine probabilité.

Le problème consiste à déterminer le triplet (x_0, x_1, x_2) , où $x_i \in [0, 1]$ est la proportion de l'actif i dans la composition du placement. Ainsi le rendement aléatoire s'écrit $r = x_0 r_0 + x_1 r_1 + x_2 r_2$ avec $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. L'entreprise effectue son choix selon un certain type de préférence et, très souvent, pour les décisions financières, ils sont supposés être bien représentés par un critère de décision espérance-variance. Celui-ci suppose les lois de probabilité des deux actifs connues pour pouvoir calculer l'espérance et la variance du rendement de chaque actif.

En notant E l'opérateur espérance, le rendement attendu de l'actif i est $E(r_i) = m_i$, tandis que son risque est mesuré par $V(r_i) = E((r_i - m_i)^2) = v_i$. La covariance entre les actifs aléatoires 1 et 2 est donnée par $E(r_1, r_2) = E(r_2, r_1) = c$. En revanche, pour l'actif 0 non risqué l'espérance est simplement r_0 et la variance est nulle.

Ainsi, il est possible de définir l'espérance de rendement

$$\mathcal{E} = R(x_0 r_0 + x_1 m_1 + x_2 m_2)$$

ainsi qu'une estimation du risque représenté par sa variance

$$\mathcal{V} = R^2 (v_1 x_1^2 + 2c x_1 x_2 + v_2 x_2^2)$$

Dès lors, selon le critère de décision espérance-variance, sélectionner un portefeuille optimal revient à choisir celui pour lequel le rendement espéré \mathcal{E} est maximal tout en tenant compte d'un risque minimal représenté par une faible variance \mathcal{V} . Ainsi la fonction d'utilité de la firme peut s'écrire simplement

$$U = \mathcal{E} - \frac{1}{2} a \mathcal{V}$$

où $a \geq 0$ est un paramètre non négatif représentant la préférence pour le rendement plutôt que le risque, c'est donc un indice d'aversion au risque. On posera $a > \frac{1}{R}$. En posant $x_0 = 1 - x_1 - x_2 \geq 0$, le problème est de choisir (x_1, x_2) de sorte que

$$\begin{cases} \max_{x_1, x_2} U \\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \\ 1 - x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le lagrangien de ce problème s'écrit donc

$$L = R((1 - x_1 - x_2)r_0 + x_1m_1 + x_2m_2) - R^2 \left(\frac{1}{2}av_1x_1^2 + acx_1x_2 + \frac{1}{2}av_2x_2^2 \right) + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent alors

$$\begin{aligned} x_1 L'_{x_1} &= Rx_1(-r_0 + m_1 - av_1x_1R - 2acx_2R - \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad L'_{x_1} \leq 0 \\ x_2 L'_{x_2} &= Rx_2(-r_0 + m_2 - av_2x_2R - 2acx_1R - \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad L'_{x_2} \leq 0 \\ \lambda(1 - x_1 - x_2) &= 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Plutôt que de résoudre de manière globale (ce que le lecteur peut effectuer en guise d'exercice), on se concentre sur le cas où

$$\begin{aligned} r_0 &= 1; m_1 = 2 \quad \text{et} \quad m_2 = 3 \\ v_1 &= 1 \quad \text{et} \quad v_2 = v \geq 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Cela correspond à la situation où l'actif sans risque est la monnaie, les deux actifs risqués sont indépendants et l'actif 1 est moins rentable que l'actif 2. En revanche la volatilité relative des actifs est variable. Si $v < 1$, l'actif 2 est moins risqué que l'actif 1 et inversement si $v > 1$.

En reprenant les conditions nécessaires d'optimalité dans le cadre de cet exemple il vient

$$\begin{aligned} Rx_1(1 - ax_1R - \lambda) &= 0 \quad \text{et} \quad L'_{x_1} \leq 0 \\ Rx_2(2 - avx_2R - \lambda) &= 0 \quad \text{et} \quad L'_{x_2} \leq 0 \\ \lambda(1 - x_1 - x_2) &= 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Si la contrainte est libre alors $\lambda = 0$ et la solution intérieure s'écrit

$$\begin{cases} x_0^* = 1 - \frac{v+2}{avR} \\ x_1^* = \frac{1}{aR} \\ x_2^* = \frac{2}{avR} \end{cases}$$

En revanche si la contrainte est saturée on a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^* = 0 \\ x_1^* = \frac{Rav - 1}{Ra(1 + v)} \\ x_2^* = \frac{1 + Ra}{Ra(1 + v)} \\ \lambda^* = \frac{R(v + 2 - Rav)}{v + 1} \end{array} \right.$$

Donc tant que $v \leq \frac{2}{Ra-1}$, l'actif non risqué n'est pas conservé dans le portefeuille (c'est-à-dire que $x_0^* = 0$). En effet, l'entreprise est dans une situation où il existe un faible risque sur les actifs 1 et 2. Les rendements élevés qu'ils rapportent l'incitent à répartir sa trésorerie uniquement entre ces deux actifs. En revanche, lorsque v est plus importante, $v > \frac{2}{Ra-1}$ alors il vaut mieux ne pas placer toute la trésorerie dans les actifs risqués (c'est-à-dire que $x_0^* > 0$) car la volatilité de l'actif 2 devient suffisamment importante pour que le risque soit en partie évité. Lorsque $2 > v > \frac{2}{Ra-1}$, la répartition entre les deux actifs risqués est alors à l'avantage du n°2, ce qui correspond ici à un arbitrage en faveur d'un rendement espéré plus important même si le risque est plus élevé, soit $x_2^* > x_1^*$. En revanche si $v \geq 2$, l'arbitrage se fait en faveur d'un risque moins important et $x_1^* \leq x_2^*$.

1.7.2 La détermination des choix

A. Choix dans un environnement certain : le modèle du consommateur

L'analyse du choix de consommation dans un cadre rationnel de préférence suppose le plus souvent qu'une fonction réelle et continue est suffisante pour représenter un tel choix. On la qualifie de fonction d'utilité ou de satisfaction. Pour cela il faut que les préférences soient représentées par une relation binaire qualifiée de préordre des préférences admettant plusieurs propriétés : la complétude (tous les choix sont comparables), la réflexivité (chaque choix est comparable avec lui-même), la transitivité (les choix sont cohérents entre eux) et enfin la continuité (les choix discontinus sont écartés). On examine plusieurs aspects en s'inspirant de Varian (2008).

Le problème de base. Un agent économique consomme 2 biens en quantités x_1 et x_2 dont les prix respectifs sont p_1 et p_2 alors que son budget est limité à $R \text{ €}$. Doté de la fonction d'utilité $U(x_1, x_2)$ qui représente ses préférences, le problème du consommateur est de choisir les quantités qui maximisent son utilité (c.à.d. le choix le plus satisfaisant) sous contrainte que sa dépense $p_1x_1 + p_2x_2$ ne dépasse pas son revenu R , soit

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \text{ s/c } R - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0$$

En formant le lagrangien $L = U(x_1, x_2) + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2)$, les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent

$$\begin{aligned} L'_{x_1} &= 0 \Leftrightarrow U'_{x_1}(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0 \\ L'_{x_2} &= 0 \Leftrightarrow U'_{x_2}(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0 \\ \lambda &\geq 0, \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2) = 0 \end{aligned}$$

S'il existe un point (x_1^0, x_2^0) tel que $U'_{x_i}(x_1^0, x_2^0) = 0$ pour $i = 1, 2$ et si $R > p_1x_1^0 + p_2x_2^0$, alors la contrainte est libre ($\lambda^0 = 0$), et ce point (x_1^0, x_2^0) est le choix optimal de consommation de l'individu. Cette situation correspond au cas de satiété dans la théorie du consommateur pour lequel l'individu optimise son utilité en annulant ses utilités marginales. La solution est celle du problème d'optimisation libre : $\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2)$.

Toutefois, ce cas est le plus souvent écarté en raison de l'hypothèse supplémentaire de non saturation des préférences (ou de non satiété) c'est-à-dire $U'_{x_i}(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2)$. Les utilités marginales sont donc toujours positives et l'utilité est toujours croissante avec les quantités consommées de chaque bien. Ainsi lorsque cette dernière propriété est supposée ou bien, lorsqu'au point (x_1^0, x_2^0) , la contrainte est violée, soit $R < p_1x_1^0 + p_2x_2^0$, il apparaît que la contrainte est saturée. La solution est telle que :

$$TMS_{1,2} \equiv \frac{U'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{U'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{et} \quad R = p_1x_1^* + p_2x_2^* \quad (1.11)$$

où le $TMS_{1,2}$, défini par le rapport des utilités marginales $U'_{x_i}(x_1, x_2)$ est appelé le taux marginal de substitution du choix 1 au choix 2. C'est une mesure de la façon dont l'agent substitue une consommation d'un bien à une autre, de façon à ce que son utilité reste identique. Il est fréquent de considérer que le $TMS_{1,2}$ est décroissant soit $(TMS_{1,2})'_{x_1} \leq 0$. Cela traduit l'idée qu'il est de plus en plus pénible pour le consommateur d'augmenter la consommation de bien 2 car il doit réduire fortement celle de bien 1 pour conserver son utilité constante. C'est alors le signe que la fonction d'utilité est une fonction quasi-concave : on dit que les préférences sont convexes, car les courbes de niveaux de la fonction $U(x_1, x_2)$ le sont.

La consommation optimale consiste d'une part à dépenser tout le budget et d'autre part à le faire en comparant le gain marginal relatif de la consommation des deux biens (le TMS) aux prix relatifs des biens $\frac{p_1}{p_2}$, soit le coût d'opportunité (en valeur absolu) de la contrainte de budget. Ici le triplet (R, p_1, p_2) est le vecteur des paramètres du problème. La solution que l'on détermine en résolvant (1.11) est du type $(x_1^*(p_1, p_2, R), x_2^*(p_1, p_2, R))$. Ces fonctions forment les demandes marshalliennes de l'agent pour les deux biens.

On peut aisément voir que R , le budget, est un paramètre de relâchement de la contrainte éponyme. Dès lors, en invoquant le théorème de l'enveloppe, on peut écrire que

$$\lambda^* = L'_R(x_1^*, x_2^*, R)$$

Le multiplicateur du problème représente l'utilité marginale du budget, qui est bien sûr positive quand celui-ci est dépensé entièrement.

Au delà de cette analyse que l'on peut qualifier de standard, certains prolongements peuvent être menés en introduisant certaines contraintes à même de représenter des environnements de décision spécifiques. On peut citer les questions de rationnement, d'arbitrage revenu-temps, de non-consommation ou encore d'arbitrage consommation-loisir. On présente ici les deux premiers points et les deux derniers seront donnés à titre d'exercice.

Rationnement. Il est parfois impossible de consommer à loisir ce qui suppose un rationnement des quantités achetées (comme au sein de certaines économies insulaires par exemple). Supposons par exemple que seules k unités du bien 2 peuvent être achetées par le consommateur. En se concentrant sur la solution positive ($x_i > 0$), le problème devient alors

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \text{ s/c } R - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0 \text{ et } x_2 \leq k$$

En associant le multiplicateur μ à la contrainte de rationnement, les conditions nécessaires s'écrivent

$$\begin{aligned} U'_{x_1}(x_1, x_2) - \lambda p_1 &= 0 \\ U'_{x_2}(x_1, x_2) - \lambda p_2 - \mu &= 0 \\ \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2) &= 0, \lambda \geq 0 \\ \mu(k - x_2) &= 0, \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que la contrainte de rationnement soit libre soit $k > x_2$ alors on se retrouve dans le cas « standard » défini par (1.11) où seule la contrainte de budget est saturée. Donc la solution, signalée par † , est ici $x_i^\dagger = x_i^*$. Comme en rajoutant une contrainte supplémentaire au problème, on ne peut pas faire accroître l'utilité, cette solution apparaît si $x_2^* < k$. En revanche si $k \leq x_2^*$ alors les contraintes de budget et de rationnement sont saturées simultanément et on a

$$\begin{aligned} x_2^\dagger &= k \text{ et } x_1^\dagger = \frac{R}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} k \\ TMS_{1,2}^\dagger &= \frac{p_1}{p_2 + \Lambda} \leq \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

avec

$$\Lambda = \frac{\mu}{\lambda} = p_1 \left(\frac{U'_{x_2}(x_1^\dagger, k)}{U'_{x_1}(x_1^\dagger, k)} - \frac{p_2}{p_1} \right) > 0$$

Pour interpréter la solution que l'on vient d'obtenir, on constate que du fait du rationnement, le consommateur ne peut pas atteindre la solution (x_1^*, x_2^*) . Donc le $TMS_{1,2}^\dagger$ est inférieur au rapport des prix de marché et devient égal au rapport des prix où le prix du bien 2 est augmenté du prix implicite du rationnement, Λ , qui traduit sa rareté.

L'arbitrage revenu-temps. Le revenu d'un individu limite la consommation mais le temps aussi. Si on rajoute une contrainte de budget-temps où t_i est le temps qu'il est nécessaire pour consommer une unité de bien i et T le montant total de temps disponible, alors elle s'écrit

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 \leq T$$

En notant ℓ , le multiplicateur associé à cette contrainte, le nouvel équilibre implique les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} U'_{x_1}(x_1, x_2) &= \lambda p_1 + \ell t_1 \\ U'_{x_2}(x_1, x_2) &= \lambda p_2 + \ell t_2 \\ \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2) &= 0, \lambda \geq 0 \\ \ell(T - t_1 x_1 - t_2 x_2) &= 0, \ell \geq 0 \end{aligned}$$

Si une fois encore la monotonie des préférences est vérifiée, alors au moins une des deux contraintes est saturée. En notant $\Lambda = \frac{\ell}{\lambda}$, un nouvel arbitrage apparaît :

$$\begin{aligned} TMS_{1,2} &= \frac{p_1 + \Lambda t_1}{p_2 + \Lambda t_2} \\ \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2) &= 0 \\ \ell(T - t_1 x_1 - t_2 x_2) &= 0 \end{aligned}$$

La première relation revient à préciser de quelle manière l'agent doit prendre en compte la valeur du temps utilisée pour consommer les biens, Λt_i . Ici, Λ est la valeur implicite de la rareté relative du temps par rapport à la richesse.

Lorsque les deux contraintes sont saturées, la solution marquée par le symbole $^\#$, est telle que

$$\begin{cases} R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ T = t_1 x_1 + t_2 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^\# = \frac{Rt_2 - Tp_2}{p_1 t_2 - p_2 t_1} \\ x_2^\# = \frac{Tp_1 - Rt_1}{p_1 t_2 - p_2 t_1} \end{cases}$$

Cela implique que, lorsque $\frac{p_1}{p_2} > \frac{t_1}{t_2}$ alors $\frac{p_1}{t_1} \geq \frac{R}{T} \geq \frac{p_2}{t_2}$ et lorsque $\frac{p_1}{p_2} < \frac{t_1}{t_2}$ alors $\frac{p_1}{t_1} \leq \frac{R}{T} \leq \frac{p_2}{t_2}$. Ainsi lorsque le revenu par unité de temps (le rapport entre le revenu et le temps disponible) est borné, c'est-à-dire ni trop important, ni trop faible, alors les niveaux de consommation sont indépendants de leur utilité (à la marge) et sont purement dictés par les contraintes de revenu et de temps.

En revanche si $\frac{R}{T}$ est très faible soit parce que T est très grand, par exemple l'agent a du *temps libre*, ou bien parce que R est très faible, l'agent est *pauvre*, alors seule la contrainte de revenu est saturée et donc $\Lambda = 0$. On retrouve la solution standard où $TMS_{1,2} = \frac{p_1}{p_2}$. Enfin, lorsque $\frac{R}{T}$ est élevé du fait de R très grand, l'agent est très *riche* ou bien car T est très faible, l'agent est très *affairé*, seule la contrainte de temps est saturée et donc $\Lambda \rightarrow \infty$. On a alors $TMS_{1,2} = \frac{t_1}{t_2}$, les variables monétaires (revenu et prix) ne sont pas un problème, seul le temps qui est rare guide le choix. La consommation est basée sur le temps unitaire relatif et la solution optimale est telle que

$$\begin{cases} \frac{U'_{x_1}(x_1^\#, x_2^\#)}{U'_{x_2}(x_1^\#, x_2^\#)} = \frac{t_1}{t_2} \\ T = t_1 x_1^\# + t_2 x_2^\# \end{cases}$$

B. Choix dans un environnement incertain : la demande d'assurance

Les choix sont rarement effectués dans des conditions déterministes. Lorsque peuvent s'opérer des changements aléatoires de l'environnement de décision, l'optimisation devient stochastique. Par exemple, pour le consommateur, ces modifications peuvent affecter le niveau des prix, le niveau du revenu ou bien même les préférences. L'approche par les techniques d'optimisation sous contraintes développée précédemment reste valide du moment que l'on dispose d'un critère pour prendre en compte ces changements aléatoires. Par exemple, la théorie de l'utilité espérée permet de simplifier grandement l'incorporation de ces aléas en supposant d'une part que les événements sont probabilisables et d'autre part que les préférences des agents obéissent à la maximisation de l'espérance des niveaux d'utilité. Examinons le problème de la demande d'assurance.

La demande d'assurance. Supposons, comme le propose Varian (2008), qu'un consommateur détienne initialement une richesse monétaire de $w \in \mathbb{R}$ mais qu'il existe une certaine probabilité $\alpha \in (0,1)$ pour qu'il perde un montant $y \in \mathbb{R}$ de cette richesse (avec $y < w$). Par exemple cela peut correspondre au fait que sa maison encourt un risque d'incendie ou bien qu'il puisse être victime d'un accident de voiture. Cet individu peut alors contracter une assurance qui lui permet d'être dédommagé de $x \in \mathbb{R}$ si apparaît l'évènement occasionnant la perte. Pour cela, le contrat stipule qu'il doit déboursier une somme de $p \times x \in \mathbb{R}$ pour la couverture d'assurance où $p > 0$ est la prime d'assurance par euro couvert. Quelle est le niveau de couverture x que ce consommateur doit contracter auprès de l'assureur ?

Sous la forme d'un problème de maximisation de l'utilité espérée, cela revient à écrire

$$\max_x E[u] = \alpha u(w - y - \rho x + x) + (1 - \alpha)u(w - \rho x) \quad \text{s/c } 0 \leq x \leq w$$

où la fonction u croissante et concave, représente l'utilité de la richesse dans chacun des états possibles. En effet avec une probabilité α le dommage de $y \in$ est subi mais l'assurance verse le montant $x \in$ assuré. En revanche, même si le dommage n'est pas subi (ce avec une probabilité $1 - \alpha$), le coût de l'assurance $\rho x \in$ est supporté par l'individu. Comme on l'examinera, la concavité de u est cruciale pour caractériser la solution d'assurance x^* car elle indique une attitude d'aversion de l'agent vis-à-vis du risque.

Les conditions nécessaires s'écrivent

$$\begin{aligned} L'_x &= (1 - \rho)\alpha u'(w - y - \rho x + x) - \rho(1 - \alpha)u'(w - \rho x) - \lambda \leq 0 \\ xL' &= x((1 - \rho)\alpha u'(w - y + (1 - \rho)x) - \rho(1 - \alpha)u'(w - \rho x) - \lambda) = 0 \\ \lambda(w - x) &= 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Plusieurs questions peuvent être traitées.

Question 1. L'individu a-t-il intérêt à ne pas s'assurer du tout ? En d'autres termes, $x^* = 0$ peut-il être une solution ? Dans ce cas $w - 0 > 0$ donc $\lambda^* = 0$ et il vient

$$\begin{aligned} (1 - \rho)\alpha u'(w - y) - \rho(1 - \alpha)u'(w) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \rho}{\rho} &\leq \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{u'(w)}{u'(w - y)} \end{aligned}$$

Comme le ratio $\frac{1 - \rho}{\rho}$ est décroissant avec ρ , alors la solution $x^* = 0$ est optimale si la prime marginale d'assurance dépasse un seuil ρ_0 défini par $\frac{1 - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{u'(w)}{u'(w - y)}$ ce qui implique que

$$\rho_0 = \frac{1}{1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{u'(w)}{u'(w - y)}} < 1$$

On remarque que cette solution est valide si $\rho > 1$, car le paiement de la prime dépassera toujours le dédommagement.

Question 2. L'individu a-t-il intérêt à assurer toute sa richesse ? Dit autrement, $x^* = w$ peut-il être une solution ? Pour cela, on doit vérifier que

$$\begin{aligned} (1 - \rho)\alpha u'((1 - \rho)w + w - y) - \rho(1 - \alpha)u'((1 - \rho)w) &= \lambda \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \rho}{\rho} &\geq \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{u'((1 - \rho)w)}{u'((1 - \rho)w + (w - y))} \end{aligned}$$

Cette solution émerge si la prime marginale est assez faible (i.e. : inférieure à ρ_1 défini par $\frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{u'((1-\rho_1)w)}{u'((1-\rho_1)w+(w-y))}$)³.

Question 3. Est-il optimal pour l'individu de n'assurer qu'une partie de sa richesse, soit $x^* \in]0, w[$? Des réponses précédentes, on déduit que tel est le cas si la prime est d'un niveau intermédiaire situé entre les seuils ρ_1 et ρ_0 . Comme $\lambda^* = 0$ dans ce cas, x^* est solution de l'équation suivante :

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{u'(w-y+(1-\rho)x)}{u'(w-\rho x)} = \frac{1-\rho}{\rho} \quad (1.12)$$

Cette équation reflète l'idée que l'individu choisit son niveau d'assurance de sorte à égaliser l'utilité marginale espérée de sa richesse dans chacun des deux états possibles.

Ce dernier constat permet d'interpréter le multiplicateur $\lambda > 0$ obtenu dans la réponse à la question 2 lorsque toute la richesse est assurée. Dans ce cas précis, l'individu accorde une utilité marginale espérée supérieure à sa richesse en cas de dommage qu'à celle sans dommage. Un multiplicateur positif traduit donc l'idée que l'individu a une forte aversion à l'égard du risque.

Question 4. Dans quelles conditions l'assurance contre la perte est-elle complète, au sens où l'individu ne souscrit exactement que le montant de la perte qu'il anticipe, soit $x^* = y$? Dans ce cas là, la condition nécessaire se résume à

$$\frac{1-\rho}{\rho} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \rho = \alpha$$

Cette condition correspond à celle d'une tarification de l'assurance au coût pour l'assureur. Cela arrive par exemple si la structure du marché de l'assurance est parfaitement concurrentielle. En effet, le profit espéré de l'assureur face à un client qui souscrit x est

$$E[\pi] = \alpha(\rho x - x) + (1-\alpha)\rho x = \rho x - \alpha x$$

Si l'entreprise ne fait pas de profit sur le contrat alors pour tout x , cela implique que $E[\pi] = 0$ soit $\rho = \alpha$.

Ce dernier résultat dépend de façon cruciale de l'hypothèse selon laquelle le consommateur ne peut pas influencer la probabilité de perte. Si ces actions modifient la probabilité de perte, les sociétés d'assurance peuvent souhaiter uniquement une assurance partielle ($x^* < y$), de sorte que le consommateur aura toujours une incitation à la prudence.

3 Pour déterminer l'existence de la borne ρ_1 , il faut d'abord constater que les ratios $\frac{1-\rho}{\rho}$ et $\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{u'((1-\rho)w)}{u'((1-\rho)w+(w-y))}$ sont continus par rapport à ρ . De plus, si $\rho \rightarrow 0$ alors $\frac{1-\rho}{\rho} \rightarrow \infty > \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{u'(0)}{u'(w-y)}$, tandis que si $\rho = 1$ alors $\frac{1-\rho}{\rho} = 0 < \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{u'(w)}{u'(2w-y)}$. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe (au moins) la valeur ρ_1 .

À partir de (1.12), le théorème des fonctions implicites permet de déterminer comment la solution x^* évolue en fonction des paramètres, et notamment de la perte y . Ainsi, en différentiant (1.12), on obtient

$$\frac{dx^*}{dy} = \frac{1-\alpha}{1-\rho} \frac{u''(w-y-\rho x+x)}{\left[(1-\alpha)u''(w-y-\rho x+x) + \alpha u''(w-\rho x)\right]} > 0$$

Or, puisque u est concave, la fonction objectif est supermodulaire par rapport à y car

$$E[u]''_{xy} = -(1-\rho)\alpha u''(w-y-\rho x+x) > 0$$

On en déduit que la solution x^* est croissante avec y . En effet, plus la perte potentielle est importante plus il est logique que l'agent s'assure fortement.

1.7.3 Analyse des interactions

Jusqu'à présent, les applications proposées ne traitaient pas des interactions éventuelles entre les agents économiques. On aborde ce point maintenant.

A. Un petit détour par la théorie des jeux

La théorie des jeux analyse les interactions entre des individus qui décident rationnellement sans pouvoir prévoir complètement les résultats des stratégies qu'ils adoptent du fait des interactions avec d'autres individus qui agissent de même. Ces situations sont appelées des *jeux* et d'une certaine façon peuvent être envisagées comme des problèmes d'optimisation pour chaque unité de décision (un *joueur*). Comme il existe une infinité de situations de jeu possibles selon la séquence des choix des joueurs, l'information qu'ils détiennent sur les joueurs adverses ou sur l'histoire du jeu, a priori, il pourra exister un grand nombre de *résultats* possibles. Le but n'est pas de développer tous ces aspects mais de se centrer sur l'un d'entre eux. Pour déterminer l'issue du jeu, on doit trouver ce que l'on appelle l'équilibre du jeu. Il en existe plusieurs et celui que l'on présente ici est celui d'équilibre de Nash d'un jeu à actions simultanées (voir Rasmusen, 2004).

Définition 1.18. (Équilibre de Nash). *Un ensemble de stratégies (x_1^*, x_2^*) est appelé équilibre de Nash si aucun individu ne peut obtenir une utilité plus élevée en choisissant une stratégie différente, la stratégie de l'adversaire étant supposée donnée.*

L'interprétation de cette définition est la suivante, si on trouve un équilibre de Nash, alors aucun individu ne souhaite modifier sa stratégie. Formellement, l'équilibre de Nash est atteint lorsque :

$$\begin{aligned} U_1(x_1^*, x_2^*) &\geq U_1(x_1, x_2^*), \quad \forall x_1 \in X_1 \\ U_2(x_1^*, x_2^*) &\geq U_2(x_1^*, x_2), \quad \forall x_2 \in X_2 \end{aligned}$$

où X_1 et X_2 sont les ensembles de stratégies possibles pour les joueurs. Cela implique la résolution simultanée des deux problèmes d'optimisation liés suivants

$$\max_{x_1 \in X_1} U_1(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \max_{x_2 \in X_2} U_2(x_1, x_2)$$

Dans de nombreux cas d'applications de la théorie des jeux, les ensembles de choix X_i des joueurs $i = 1, 2$ sont finis et discrets ce qui implique une représentation bimatricielle des utilités $U_i(x_1, x_2)$. Toutefois, étant donné notre approche continue des problèmes d'optimisation, on aborde ici un cadre légèrement plus général de situation de jeux pour lequel les fonctions d'utilité $U_i(x_1, x_2)$ sont continues et dérivables. Dans ce cas, un équilibre de Nash d'un jeu où les stratégies des joueurs sont représentées par des nombres réels, soit $X_i \subset \mathbb{R}$, implique que les conditions nécessaires suivantes soient vérifiées

$$U'_{1_{x_1}}(x_1^*, x_2^*) = 0 \quad \text{et} \quad U'_{2_{x_2}}(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Ces conditions d'optimalité que doit satisfaire un équilibre de Nash, permettent de comprendre que celui-ci va différer de la solution du jeu consistant à déterminer une solution collectivement efficace pour les deux joueurs. Pour cela, on se doit de déterminer un optimum collectif de ce jeu consistant à chercher les stratégies (x_1^{**}, x_2^{**}) qui maximisent la somme des utilités des joueurs, soit résoudre le problème d'optimisation

$$\max_{x_1, x_2} U_1(x_1, x_2) + U_2(x_1, x_2)$$

qui implique les conditions nécessaires suivantes

$$\begin{aligned} U'_{1_{x_1}}(x_1^{**}, x_2^{**}) + U'_{2_{x_1}}(x_1^{**}, x_2^{**}) &= 0 \\ U'_{1_{x_2}}(x_1^{**}, x_2^{**}) + U'_{2_{x_2}}(x_1^{**}, x_2^{**}) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi à moins que le jeu ne conduise à ce que les effets croisés marginaux des stratégies des autres joueurs soient nuls (au moins pour cet optimum) c'est-à-dire, $U'_{1_{x_2}}(x_1^{**}, x_2^{**}) = U'_{2_{x_1}}(x_1^{**}, x_2^{**}) = 0$, la solution efficace (x_1^{**}, x_2^{**}) qui serait unanimement préférée par les joueurs va différer de l'équilibre de Nash (x_1^*, x_2^*) . Cette propriété illustre l'idée contenue dans les jeux dits du dilemme du prisonnier, où la non coopération des joueurs, qui est à la base des comportements des joueurs pour un équilibre de Nash, conduit à une situation collectivement moins préférable c'est-à-dire moins efficace en terme d'allocation des décisions.

B. Le jeu de lobbying

En guise d'illustration, considérons le jeu politico-économique suivant où deux joueurs investissent dans des actions de lobbying afin de persuader une organisation de distribuer une enveloppe budgétaire d'un montant de $V - M$ €, permettant de financer leur

projet plutôt que celui (équivalent) du concurrent. Ce lobbying est représenté par une contribution monétaire individuelle $k_i \geq 0$ permettant, par pression politique, d'accroître la probabilité $x_i \in [0,1]$ que le budget soit attribué au projet i . Puisqu'accroître la probabilité est coûteux, la contribution est estimée être une fonction croissante de cette probabilité, soit $k_i = a_i x_i^2$, où a_i est un paramètre d'échelle du coût du lobbying (il représente le talent de lobbyiste du groupe i). Ainsi le gain espéré de chaque groupe $i = 1, 2$ est donné par l'espérance de remporter le budget nette de la contribution, soit

$$U_1(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2)V + x_1 x_2 \frac{V}{2} - k_1 \quad \text{et} \quad U_2(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1)V + x_1 x_2 \frac{V}{2} - k_2$$

En effet, si le projet du groupe 1 est choisi et celui du groupe 2 rejeté, alors le groupe 1 remporte V avec une probabilité $x_1(1 - x_2)$. Mais si l'organisation décide de financer les deux projets, alors la moitié de l'enveloppe, soit $\frac{V}{2}$, est distribuée à chaque concurrent avec une probabilité $x_1 x_2$. Enfin le groupe 1 ne remporte rien avec une probabilité $(1 - x_1)x_2$. Pour simplifier on pose ici $a_1 = a_2 = 1$ et $V = 1$.

Cherchons l'équilibre de Nash quand les joueurs décident individuellement du montant de leur contribution k_i . Etant donné que k_i est une fonction monotone croissante convexe de x_i , « choisir » la probabilité de gagner revient aussi à choisir la contribution. Donc, chaque joueur est amené à déterminer la probabilité de gagner optimale. Pour une solution intérieure, le système des conditions nécessaires s'écrit :

$$U'_{1_{x_1}}(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_2}{2} - 2x_1 = 0 \quad \text{et} \quad U'_{2_{x_2}}(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{2} - 2x_2 = 0$$

En résolvant ce système, on obtient pour le joueur i la fonction de meilleure réponse R_i (ou fonction de réaction) à la stratégie x_j de son adversaire j :

$$x_1 = R_1(x_2) = \frac{1}{4}(2 - x_2) \quad \text{et} \quad x_2 = R_2(x_1) = \frac{1}{4}(2 - x_1)$$

L'équilibre de Nash est alors à l'intersection (ici unique) des meilleures réponses des deux joueurs, ce qui revient à résoudre le système suivant

$$x_1^* = R_1(x_2^*) \quad \text{et} \quad x_2^* = R_2(x_1^*)$$

La solution est $x_1^* = x_2^* = \frac{2}{5}$. À l'équilibre, le niveau de contribution de chaque groupe est de $\frac{4}{25}$ et le gain espéré obtenu est $U_i^* = \frac{4}{25}$, $i = 1, 2$.

À présent, recherchons l'optimum collectif de ce jeu, en résolvant le problème de maximisation des gains espérés joints, soit $\max_{x_1, x_2} W(x_1, x_2)$ où

$$W(x_1, x_2) = U_1(x_1, x_2) + U_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

Les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent donc

$$\begin{cases} W'_{x_1} = 1 - x_2 - 2x_1 = 0 \\ W'_{x_2} = 1 - x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^{**} = x_2^{**} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, la probabilité de l'emporter seul est plus faible qu'en situation non coopérative car les contributions de chaque groupe sont plus faibles $x_i^{**} = \frac{1}{9} < \frac{2}{5} = x_i^*$. En revanche, le gain total espéré est plus élevé : $W(x_1^{**}, x_2^{**}) = \frac{1}{3} > 2 \frac{4}{25} = \frac{8}{25}$. On en déduit que le gain espéré individuel l'est aussi $\frac{1}{6} > \frac{4}{25}$. En effet, les économies réalisées par chaque groupe sur sa contribution font plus que compenser la diminution de la probabilité de gagner. Cet arbitrage apparaît car chaque groupe désormais, prend en compte le fait que sa contribution a une influence sur l'effet de la contribution de l'autre groupe.

C. La concurrence entre firmes

Hormis les cas de concurrence parfaite et de monopole, l'analyse économique des industries et des marchés doit tenir compte des interactions entre les entreprises agissant sur le marché afin d'expliquer correctement le fonctionnement de celui-ci. La représentation de la nature concurrentielle emprunte les outils de l'optimisation et de la théorie des jeux.

Pour l'illustrer, considérons, en s'inspirant de Singh et Vives (1984), un duopole différencié du point de vue des produits, c'est-à-dire pour lequel deux firmes vendent des produits que les consommateurs ne considèrent pas comme parfaitement substituables. Notons q_i (resp. q_j) la demande s'adressant à la firme i (resp. j), et p_i (resp. p_j) le prix de vente de l'entreprise i (resp. j). Supposons que la demande inverse s'adressant à la firme i est donnée par

$$p_i(q_i, q_j) = 1 - q_i - \beta q_j$$

avec $\beta \in]-1, 1[$. On peut alors déduire le système de demandes marshalliennes

$$q_i(p_i, p_j) = \frac{1}{1+\beta} - \frac{1}{1-\beta^2} p_i + \underbrace{\frac{\beta}{1-\beta^2} p_j}_A$$

Ainsi, le signe de β (et donc de A) indique la différenciation des produits : les biens fabriqués par i et j sont des compléments si $\beta < 0$ car la hausse du prix du concurrent j fait baisser la demande de i , et des substituts sinon.

Sans perte de généralité, supposons que les niveaux de prix p_i soient nets du coût marginal de la firme i , ainsi le profit de i s'écrit simplement $\pi_i = p_i q_i$.

Supposons par ailleurs, que les firmes peuvent se concurrencer sur les quantités (Cournot, exposant C) ou sur les prix (Bertrand, exposant B). Dans le premier cas, le profit de i s'écrit :

$$\pi_i^C(q_i, q_j) = q_i(1 - q_i - \beta q_j)$$

La condition nécessaire qui maximise ce profit est :

$$1 - 2q_i - \beta q_j = 0$$

de sorte que la fonction de réaction de Cournot $R_i^C(q_j)$ est

$$q_i = R_i^C(q_j) = \frac{1}{2}(1 - \beta q_j)$$

Dans le second, le profit de i est :

$$\pi_i^B(p_i, p_j) = p_i \left(\frac{1}{1+\beta} - \frac{1}{1-\beta^2} p_i + \frac{\beta}{1-\beta^2} p_j \right)$$

Pour maximiser son profit, la firme doit adopter la fonction de réaction de Bertrand $R_i^B(p_j)$ suivante

$$p_i = R_i^B(p_j) = \frac{1}{2}(1 - \beta + \beta p_j)$$

issue de la condition nécessaire $\pi_{ip_i}^{B'}(p_i, p_j) = 0$.

Le tableau suivant indique les niveaux optimaux de prix, de quantités et de profits selon les conjectures de Nash adoptées :

	Prix	Quantités	Profits
Cournot	$p_i^C = \frac{1}{2+\beta}$	$q_i^C = \frac{1}{2+\beta}$	$\pi_i^C = \frac{1}{(2+\beta)^2}$
Bertrand	$p_i^B = \frac{1-\beta}{2-\beta}$	$q_i^B = \frac{1}{(1+\beta)(2-\beta)}$	$\pi_i^B = \frac{1-\beta}{(1+\beta)(2-\beta)^2}$

On remarque alors que

$$p_i^C - p_i^B = \frac{\beta^2}{(\beta+2)(2-\beta)} > 0$$

et

$$\pi_i^C - \pi_i^B = 2 \frac{\beta^3}{(\beta+2)^2(\beta+1)(2-\beta)^2} \leq 0 \quad \text{si} \quad \beta \leq 0$$

Ainsi, l'issue probable de la concurrence dépend de la nature des biens :

- si les biens sont des substituts ($\beta > 0$), les firmes optent pour la concurrence en quantité car elles évitent la guerre des prix qui peut les pousser à des profits nuls (si $\beta = 1$). En effet, en examinant les fonctions de réaction, on observe qu'à une baisse du prix de j , i répond par une baisse de

son prix, qui, en réaction, fait que j diminue à nouveau son prix. Autrement dit, une guerre des prix s'engage qui diminue fortement leur profit. Elles préfèrent donc une concurrence en quantité préservant mieux leurs marges.

- si les biens sont des compléments ($\beta < 0$), le jeu de la concurrence va s'effectuer en prix car les firmes souhaitent éviter d'inonder simultanément les marchés, ce qui ferait baisser excessivement les prix. Ce constat se fait en étudiant les fonctions de réaction : si j augmente sa production, i le suit, ce qui par ricochet, amène j à accroître la sienne. Cela pousse chaque firme à baisser son propre prix trop fortement par rapport à la hausse qui résulte de l'accroissement de la quantité du concurrent. Une concurrence en prix est donc préférable.

Remarque. On pourrait imaginer des modes de concurrence non coordonnés par exemple une firme choisit son prix et une autre ses quantités. On peut alors montrer en exercice que cela ne change pas le résultat ici reporté. Pour cela, il conviendra de résoudre des programmes d'optimisation liés.

1.7.4 Asymétrie d'information

Une situation d'asymétrie d'information apparaît lorsque deux individus en interaction ne disposent pas des mêmes informations pertinentes sur la relation qui les lie. Dans le cadre principal (non informé) et agent (informé), on distingue deux sortes de difficultés : un problème de sélection adverse si le principal n'observe pas une caractéristique d'efficacité de l'agent, un problème d'aléa moral si l'agent est le seul à connaître l'effort qu'il entreprend pour le compte du principal. Étudions tour à tour ces deux aspects.

A. Tarification non linéaire

En suivant Mussa et Rosen (1978), prenons une entreprise désirant vendre un bien de qualité q à un client, où $q > 0$. Pour l'entreprise, le coût de production est donné par la fonction $c(q)$ où $c'(q) > 0$, $c''(q) > 0$ et $c(0) = 0$. La disposition marginale à payer (ci-après DAP) du client pour cette qualité, notée θ , n'est pas connue de l'entreprise de manière certaine, d'où un problème de sélection adverse. Toutefois cette dernière sait que la DAP peut prendre le niveau $\theta = \underline{\theta} > 0$ avec la probabilité $\alpha \in]0,1[$ et le niveau $\theta = \bar{\theta}$ avec la probabilité complémentaire $1 - \alpha$, où $\bar{\theta} > \underline{\theta}$. Pour toute DAP possible $\theta \in \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$, l'entreprise propose au client un contrat à prendre ou à laisser, de la forme $\langle q, t \rangle$, où t est le tarif que paye le client, ce qui lui procure une utilité nette de $U(q, t, \theta) = \theta q - t$. Compte tenu de l'asymétrie d'information sur la DAP, le problème de l'entreprise revient à proposer au client un tarif non linéaire, $\langle (\underline{q}, \underline{t}); (\bar{q}, \bar{t}) \rangle$ où $(\underline{q}, \underline{t})$

et (\bar{q}, \bar{t}) sont les niveaux respectifs de qualité et de tarif proposés à un client qui se déclare être disposé à payer $\theta = \underline{\theta}$ et $\theta = \bar{\theta}$.

Ce contrat est écrit de manière à maximiser par rapport à $(\underline{q}, \underline{t}, \bar{q}, \bar{t})$, l'espérance du profit net de l'entreprise

$$E[\pi] = \alpha [\underline{t} - c(\underline{q})] + (1 - \alpha) [\bar{t} - c(\bar{q})]$$

sous deux types de contraintes :

(i) que tout client de DAP $\theta \in \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$ accepte le contrat c'est-à-dire en retire une utilité nette positive :

$$\begin{aligned} \underline{\theta} \underline{q} - \underline{t} &\geq 0 \\ \bar{\theta} \bar{q} - \bar{t} &\geq 0 \end{aligned}$$

(ii) que chaque client soit incité à révéler sa DAP cachée $\theta \in \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$ c'est-à-dire que son utilité nette soit plus élevée en sélectionnant le contrat qui lui correspond :

$$\begin{aligned} \underline{\theta} \underline{q} - \underline{t} &\geq \bar{\theta} \bar{q} - \bar{t} \\ \bar{\theta} \bar{q} - \bar{t} &\geq \underline{\theta} \underline{q} - \underline{t} \end{aligned}$$

Bien que le problème du vendeur soit sous une forme pouvant se résoudre, il est plus commode de substituer aux variables (\underline{t}, \bar{t}) les variables (\underline{U}, \bar{U}) où \underline{U} et \bar{U} sont définies comme l'utilité obtenue par le client de DAP $\underline{\theta}$ et $\bar{\theta}$, s'il sélectionne le tarif qui lui est destiné, soit

$$\underline{U} = \underline{\theta} \underline{q} - \underline{t} \quad \text{et} \quad \bar{U} = \bar{\theta} \bar{q} - \bar{t}$$

On s'aperçoit que les contraintes (i) s'apparentent à des contraintes de non négativité pour les variables \underline{U} et \bar{U} , tandis que, comme

$$\underline{t} = \underline{\theta} \underline{q} - \underline{U} \quad \text{et} \quad \bar{t} = \bar{\theta} \bar{q} - \bar{U}$$

les contraintes (ii) deviennent

$$\underline{U} - \bar{U} + (\bar{\theta} - \underline{\theta}) \bar{q} \geq 0 \tag{1.13}$$

$$\bar{U} - \underline{U} - (\bar{\theta} - \underline{\theta}) \underline{q} \geq 0. \tag{1.14}$$

Ainsi, le problème de maximisation du vendeur s'écrit

$$\max_{\underline{q}, \bar{q}, \underline{U} \geq 0, \bar{U} \geq 0} E[\pi] = \alpha (\underline{\theta} \underline{q} - c(\underline{q}) - \underline{U}) + (1 - \alpha) (\bar{\theta} \bar{q} - c(\bar{q}) - \bar{U})$$

sous les contraintes (1.13) et (1.14).

En notant $\underline{\lambda} \geq 0$ et $\bar{\lambda} \geq 0$ les multiplicateurs associés respectivement aux contraintes (1.13) et (1.14), les conditions nécessaires sont

$$L'_q = \alpha(\underline{\theta} - c'(q)) - (\bar{\theta} - \underline{\theta})\bar{\lambda} = 0 \quad (1.15)$$

$$L'_{\bar{q}} = (1 - \alpha)(\bar{\theta} - c'(\bar{q})) + (\bar{\theta} - \underline{\theta})\underline{\lambda} = 0 \quad (1.16)$$

$$L'_U = -\alpha + (\underline{\lambda} - \bar{\lambda}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \underline{U}L'_U = 0 \quad (1.17)$$

$$L'_{\bar{U}} = \alpha - 1 - (\underline{\lambda} - \bar{\lambda}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \bar{U}L'_{\bar{U}} = 0 \quad (1.18)$$

$$\underline{\lambda} \geq 0, \underline{\lambda}(\underline{U} - \bar{U} + (\bar{\theta} - \underline{\theta})\bar{q}) = 0 \quad (1.19)$$

$$\bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}(\bar{U} - \underline{U} - (\bar{\theta} - \underline{\theta})q) = 0 \quad (1.20)$$

On décompose la résolution en 4 étapes.

Étape 1 : les contraintes $\underline{U} \geq 0$ et (1.14) sont saturées à l'optimum.

- $\underline{U} = 0$. Si $\underline{U} > 0$, alors d'après (1.17), on a $L'_U = 0$, soit $\underline{\lambda} - \bar{\lambda} = \alpha$. Par ailleurs, les conditions (1.18) impliquent que $L'_{\bar{U}} = -1$. Il est donc nécessaire que $\bar{U} = 0$ pour vérifier que $\bar{U}L'_{\bar{U}} = 0$. Dans ce cas, (1.14) est violée car $\underline{U} \leq -(\bar{\theta} - \underline{\theta})q$. Donc forcément $\underline{U}^* = 0$.

- $\bar{U} - \underline{U} - (\bar{\theta} - \underline{\theta})q = 0$. En utilisant le résultat précédent, $\underline{U} = 0$, (1.14) devient $\bar{U} - (\bar{\theta} - \underline{\theta})q \geq 0$. Si elle est libre, alors $\bar{U} > (\bar{\theta} - \underline{\theta})q > 0$, ce qui implique que la contrainte $\bar{U} \geq 0$ est libre. Dans ce cas, la relation d'exclusion (1.20) donne $\bar{\lambda} = 0$, ce qui dans la condition (1.18) nécessite que

$$\underline{\lambda} = \alpha - 1 < 0,$$

d'où une contradiction. Donc, nécessairement $\bar{U}^* = (\bar{\theta} - \underline{\theta})q > 0$.

Étape 2 : les contraintes $\bar{U} \geq 0$ et (1.13) sont libres à l'optimum.

- $\bar{U} > 0$. Ce résultat se déduit mécaniquement du second point de la première étape.

- $\underline{U} - \bar{U} + (\bar{\theta} - \underline{\theta})\bar{q} > 0$. Comme (1.14) est saturée, si (1.13) l'est aussi, il vient $q = \bar{q} > 0$. Donc d'après (1.15), on peut écrire que

$$c'(q) = \underline{\theta} - \frac{(\bar{\theta} - \underline{\theta})\bar{\lambda}}{\alpha} = c'(\bar{q})$$

et en substituant dans (1.16), cela conduit à la contradiction :

$$\underline{\lambda} = -\frac{1 - \alpha}{\alpha}(\alpha + \bar{\lambda}) < 0$$

Étape 3 : Calcul des multiplicateurs.

Ainsi, comme (1.13) est libre, on a $\underline{\lambda}^* = 0$ via la relation d'exclusion (1.19). De plus comme $\bar{U} > 0$, (1.18) implique $\bar{\lambda}^* = 1 - \alpha > 0$ puisque $L'_{\bar{U}} = 0$ et $\underline{\lambda}^* = 0$.

Étape 4 : Calcul des qualités.

Enfin, en utilisant les valeurs des multiplicateurs dans (1.15) et (1.16), on a \underline{q}^* et \bar{q}^* .

En résumé, la solution est telle que :

$$\begin{aligned}\underline{q}^* : c'(\underline{q}^*) &= \underline{\theta} - (\bar{\theta} - \underline{\theta}) \frac{1 - \alpha}{\alpha} \\ \bar{q}^* : c'(\bar{q}^*) &= \bar{\theta} \\ \underline{\lambda}^* &= 0 \text{ et } \bar{\lambda}^* = 1 - \alpha \\ \underline{U}^* &= 0 \text{ et } (\bar{\theta} - \underline{\theta}) \bar{q}^* > \bar{U}^* = (\bar{\theta} - \underline{\theta}) \underline{q}^*\end{aligned}$$

Puisque $c''(q) > 0$, on constate que

$$c'(\underline{q}^*) = \underline{\theta} - (\bar{\theta} - \underline{\theta}) \frac{1 - \alpha}{\alpha} < \underline{\theta} < c'(\bar{q}^*) = \bar{\theta} \Rightarrow \bar{q}^* > \underline{q}^*$$

Pour le « bon » client ($\theta = \bar{\theta}$), le contrat conduit à une allocation efficace de premier rang (i.e. : le vendeur observe les DAP et se retrouve dans une situation d'information symétrique). C'est-à-dire que la production destinée à ce client s'effectue de telle sorte que le coût marginal de la qualité, $c'(\bar{q}^*)$, corresponde exactement à la DAP, $\bar{\theta}$: il n'y a pas de distorsion des ventes pour le meilleur client. En revanche, une rente lui est attribuée : c'est la rente informationnelle. Pour l'inciter à révéler sa DAP, l'entreprise doit proposer au « bon » client un contrat lui garantissant une rente au moins égale à ce qu'il obtient en imitant le « mauvais » client ($\theta = \underline{\theta}$), soit $\bar{U}^* = \underline{U}^* + (\bar{\theta} - \underline{\theta}) \underline{q}^*$. Mais comme la rente abandonnée au client est un profit en moins pour l'entreprise, celle-ci diminue la production destinée au « mauvais » client par rapport au niveau efficace, afin de limiter la rente laissée au « bon » client. La distorsion de production pour la DAP $\theta = \underline{\theta}$, vient donc de cet arbitrage entre rente et efficacité.

On trouve ici l'interprétation du multiplicateur $\bar{\lambda}^*$. En vue de supprimer le phénomène d'imitation, celui-ci représente le coût marginal de la rente distribuée au bon client, qui se présente auprès de la firme avec une probabilité $1 - \alpha$, la valeur optimale du multiplicateur.

Enfin, on observe, par un calcul de statique comparative, que plus le « mauvais » client est probable (i.e. : α s'accroît), plus la distorsion est importante. En effet, en différenciant la solution implicite, on peut voir que

$$c''(\underline{q}^*) \frac{d\underline{q}^*}{d\alpha} = (\bar{\theta} - \underline{\theta}) \frac{1}{\alpha^2} > 0 \Rightarrow \frac{d\underline{q}^*}{d\alpha} > 0$$

B. Contrat de travail

Sur la base de Innes (1990), on considère une relation de travail entre un employeur et un employé à l'issue de laquelle deux niveaux de production sont réalisables : « haut » \bar{y} et « bas » \underline{y} où $\bar{y} > \underline{y}$. En termes de profit, la vente de cette production conduit l'employeur à recevoir respectivement $\pi(\bar{y}) = \bar{\pi} > \pi(\underline{y}) = \underline{\pi}$. Etant donné les aléas techniques mais aussi le travail plus ou moins performant de l'employé, la réalisation d'un niveau de production $y \in \{\bar{y}, \underline{y}\}$ n'est pas connue de manière certaine.

La probabilité, notée $\alpha(e)$, que la production et le profit soient élevés dépend donc du niveau d'effort fourni par l'employé, e . Ainsi $(1 - \alpha(e))$ est la probabilité que la production et le profit soient faibles si l'effort est e . Cet effort influence positivement (à taux décroissant) la réalisation d'une bonne production, de sorte que $\alpha'(e) > 0$, $\alpha''(e) < 0$ et $\alpha(0) = 0$. En outre, l'effort e a un coût $c(e)$ (subjectif en valeur monétaire) pour l'employé tel que $c'(e) > 0$, $c''(e) > 0$ et $c(0) = 0$.

Dans cette relation, le problème économique crucial, appelé aléa moral, réside dans le fait que l'employeur ne peut pas observer le niveau d'effort fourni par l'employé. Pour pallier cette difficulté, l'employeur propose un contrat de travail à l'employé stipulant un niveau d'effort e , un salaire fixe w et un bonus \bar{w} si \bar{y} est réalisé. Le gain espéré de l'employé est donc :

$$U = w + \alpha(e)\bar{w} - c(e)$$

soit, son fixe augmenté de son bonus espéré net du coût de son travail. Pour l'employeur, le profit espéré est réduit du montant fixe et du bonus le cas échéant, c'est-à-dire :

$$E\Pi = \alpha(e)\bar{\pi} + (1 - \alpha(e))\underline{\pi} - w - \alpha(e)\bar{w}$$

Etant donné le caractère inobservable de l'effort, l'employé (rationnel) choisit celui-ci tel que

$$e = \arg \max_{\varepsilon} w + \alpha(\varepsilon)\bar{w} - c(\varepsilon) \Leftrightarrow \bar{w} = \frac{c'(e)}{\alpha'(e)} \quad (1.21)$$

De plus, le salarié est protégé par une clause de responsabilité limitée, dans le sens où le salaire fixe ne peut pas descendre en dessous d'un certain niveau repéré par w_0 .

En utilisant la valeur du bonus exprimée en terme d'effort dans (1.21), le problème de l'employeur consiste à

$$\max_{e, w} E\Pi = \alpha(e)\bar{\pi} + (1 - \alpha(e))\underline{\pi} - w - \alpha(e)\frac{c'(e)}{\alpha'(e)}$$

sous la contrainte que $w \geq w_0$ qui fait que le salarié ne refuse pas le contrat puisque son gain espéré, en utilisant (1.21) est croissant avec l'effort ($U'_e = \frac{c''(e)\alpha'(e) - \alpha''(e)c'(e)}{\alpha'(e)^2} > 0$) et égal au fixe ($U = w$) s'il ne fait aucun effort soit $e = 0$.

Les conditions nécessaires sont :

$$L'_e = \alpha'(e)(\bar{\pi} - \underline{\pi}) - \left(c'(e) + \alpha(e) \frac{c''(e)\alpha'(e) - \alpha''(e)c'(e)}{\alpha'(e)^2} \right) = 0$$

$$L'_w = -1 + \lambda = 0$$

$$\lambda \geq 0, \lambda(w - w_0) = 0$$

De toute évidence, $\lambda = 1 > 0$, ce qui indique que le salaire fixe ne doit pas dépasser son niveau minimal. Ceci est intuitif, puisque tout € de salaire fixe gagné par l'employé est perdu par l'employeur, le coût marginal du salaire fixe est égal à $1 > 0$. Ainsi, l'employeur n'a aucun intérêt à franchir cette limite.

Quant à l'effort optimal e^* , il est tel que :

$$\alpha'(e^*)(\bar{\pi} - \underline{\pi}) - c'(e^*) = \alpha(e^*) \frac{c''(e^*)\alpha'(e^*) - \alpha''(e^*)c'(e^*)}{\alpha'(e^*)^2} > 0$$

c'est-à-dire que le gain marginal de l'effort $\alpha'(e^*)(\bar{\pi} - \underline{\pi})$ diminué de son coût marginal $c'(e^*)$, est égal à l'expression (positive) $\alpha(e^*) \frac{c''(e^*)\alpha'(e^*) - \alpha''(e^*)c'(e^*)}{\alpha'(e^*)^2}$.

Expliquons la provenance de ce dernier terme. Pour cela, il faut considérer la situation (peu réaliste) dans laquelle l'employeur est en mesure d'observer l'effort entrepris par l'employé. Il pourrait donc lui imposer d'effectuer un effort \tilde{e} tout en lui proposant une rémunération composée de la seule partie fixe telle que $w = w_0 + c(\tilde{e})$. Ainsi, l'agent ne pourrait pas refuser le contrat puisque son gain espéré serait égal au paiement fixe, tandis que, l'employeur économisant le versement d'un bonus en cas de succès, disposerait d'un profit espéré égal à :

$$\alpha(\tilde{e})\bar{\pi} + (1 - \alpha(\tilde{e}))\underline{\pi} - w_0 - c(\tilde{e})$$

L'effort optimal serait alors

$$\alpha'(\tilde{e})(\bar{\pi} - \underline{\pi}) - c'(\tilde{e}) = 0$$

On constate donc que l'asymétrie d'information dans laquelle se trouve l'employeur crée une distorsion sur l'effort optimal qui ne correspond plus à celui qui serait obtenu si l'information était symétrique. Pour expliquer cette distorsion, il faut se rappeler que l'on a montré ci-dessus que le gain espéré de l'employé est croissant avec l'effort. Il s'ensuit que l'employé est d'autant mieux loti que le principal lui demande un effort élevé. L'effort s'avère donc coûteux pour l'employeur qui préfère ainsi réduire son niveau par rapport à son niveau efficace \tilde{e} . À la marge, le coût espéré est $\alpha(e) \frac{c''(e)\alpha'(e) - \alpha''(e)c'(e)}{\alpha'(e)^2}$, terme que l'on retrouve dans la détermination

de l'effort optimal. On dit que l'employeur procède à un arbitrage entre rente et efficacité.

1.8 EXERCICES

Gestion de stock avec ruptures. À partir du modèle de Wilson présenté dans les applications, il est possible de prendre en compte les ruptures de stock. Supposons maintenant que le temps est continu, donc dt est l'unité de temps et que lorsqu'une rupture de stock survient, les unités du bien demandées mais non satisfaites, notées $y \geq 0$, sont différées jusqu'à ce que la nouvelle commande soit lancée.

Le cycle de stockage s'en trouve modifié, puisqu'il ne dure que T_1 jours avec $T_1 = T - T_2$, où $T_2 = \frac{y}{v}$ est la durée de la période de rupture. Notons $r > 0$ le coût unitaire de défaillance par unité de temps t (par exemple des frais de pénalités).

1. Montrez que la fonction de coût moyen de stockage pour la durée du cycle s'écrit maintenant

$$C_M(x, y) = va - \frac{1}{2}vh + \frac{vk}{x} + \frac{1}{2}hx - hy + \frac{1}{2}\frac{hy^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{ry^2}{x}$$

2. Déterminez alors la politique de commande x^{**} et de ventes différées y^{**} qui maximise $-C_M(x, y)$.
3. Comparez les solutions et les coûts optimaux avec ceux du modèle de Wilson.

Gestion de production et externalisation. Une entreprise fabrique des poupées. La production nécessite une première dépense de 100 000 € pour équiper l'usine et les bureaux ainsi que pour disposer d'un espace de stockage des produits finis d'une capacité maximale de 200 pièces. Pour chaque produit fabriqué, une seconde dépense de 10 € doit être engagée pour couvrir l'achat des matières premières, la facture énergétique ainsi que les salaires. Enfin, si la capacité maximale de stockage est atteinte, un lieu d'entreposage externe peut être loué occasionnant, pour chaque produit fabriqué et stocké, une dépense de $(1 \times z)$ € si z représente le volume des produits stockés.

1. Écrivez la fonction retraçant le coût de production total de cette entreprise notée $C(q)$ où $q \in \mathbb{R}_+$ est le niveau de la production des poupées.
2. À l'aide de sa dérivée, étudiez les variations de $C(q)$. Qu'observe-t-on lorsque $q = 200$?
3. Étudiez les variations de la fonction de coût unitaire $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$ et discutez de l'opportunité d'utiliser l'entreposage externe pour réduire les coûts unitaires. Qu'en est-il maintenant si la dépense d'entreposage passe à $(3 \times z)$ € pour chaque produit qui y est stocké ?

Choix de consommation 1. Un consommateur achète deux biens en quantité $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité $U = x_1^a \sqrt{x_2}$ où $a \geq 0$.

1. Étudiez la croissance et la concavité de U selon les valeurs du paramètre a et donnez des interprétations économiques à ces notions ainsi qu'au paramètre a .
2. Le consommateur possède un budget de $R \in \mathbb{R}$ et fait face à des marchés sur lesquels les prix unitaires des biens sont p_1 pour le bien 1 et p_2 pour le bien 2.
 - Déterminez les demandes marshalliennes $x_1^*(p_1, p_2, R)$ et $x_2^*(p_1, p_2, R)$.
 - Déterminez la fonction d'utilité indirecte qui correspond à la fonction valeur du problème $V(R) = U(x_1^*(p_1, p_2, R), x_2^*(p_1, p_2, R))$. Calculez $\frac{d}{dR} V(p, R)$ et interprétez.

Choix de consommation 2. Soit un consommateur ayant pour fonction d'utilité

$$U(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 - \frac{b_1}{2} x_1^2 - \frac{b_2}{2} x_2^2 + \frac{c}{2} x_1 x_2$$

1. Déterminez les conditions sur les paramètres a_1, a_2, b_1, b_2 et c qui conduisent à considérer que la fonction U représente des préférences convexes.
2. Prenons $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c = 1$. Montrez que si $R < 2(p_1 + p_2)$, alors $x_1^* = \frac{1}{2} \frac{(2p_1 + p_2)R + 2p_2(p_2 - p_1)}{p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2}$, $x_2^* = \frac{1}{2} \frac{(2p_2 + p_1)R + 2p_1(p_1 - p_2)}{p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2}$ et $\lambda^* = \frac{3}{4} \frac{2(p_1 + p_2) - R}{p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2}$.
3. En prenant $R = p_1 = p_2 = 1$, démontrez que si la consommation de bien 2 est rationnée de sorte que $x_2 \leq k$, alors si $k \geq \frac{1}{2}$, la solution est $(x_1^\dagger, x_2^\dagger) = (x_1^*, x_2^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et si $k \in [0, \frac{1}{2}[$ alors $(x_1^\dagger, x_2^\dagger) = (1 - k, k)$ et $\Lambda = \frac{1 - 2k}{k} > 0$.
4. En prenant $R = p_1 = t_2 = 1$ et $p_2 = t_1 = 2$, trouvez que la solution de l'arbitrage temps-revenu est telle que :
 - si $T < \frac{8}{13}$ alors $x_1^\# = \frac{1}{14}(5T - 2)$, $x_2^\# = \frac{2}{7}(T + 1)$, $\lambda_1^\# = 0$ et $\lambda_2^\# = \frac{1}{28}(18 - 3T)$ et la contrainte de revenu est libre : $\frac{1}{14}(8 - 13T) > 0$,
 - si $T \in [\frac{8}{13}, \frac{19}{14}]$ alors $x_1^\# = \frac{1}{3}(2T - 1)$; $x_2^\# = \frac{1}{3}(2 - T)$ et $\Lambda^\# = \frac{19 - 14T}{13T - 8} \geq 0$,
 - si $T > \frac{19}{14}$ alors $x_1^\# = x_1^* = \frac{4}{4}$; $x_2^\# = x_2^* = \frac{3}{14}$ et $\lambda_1^\# = \frac{15}{28}$ et $\lambda_2^\# = 0$ et la contrainte de temps est libre : $T - \frac{19}{14} > 0$.

Choix de non-consommation. Démontrez qu'un individu dont la fonction d'utilité est $U(x_1, x_2)$ ne consomme pas le bien x_1 si le $TMS_{1,2} \leq \frac{p_1}{p_2}$ et qu'alors il consomme $\frac{R}{p_2}$ unités de bien 2.

L'arbitrage consommation-loisir. Un individu dispose de T unités de temps («heures»). Le taux de rémunération («horaire») de chaque unité de temps lorsqu'il travaille est w . Son temps de travail est le solde $T - l \geq 0$, où $l \geq 0$ est le choix du temps consacré au loisir. Ainsi, le budget de l'agent R destiné à la consommation d'un bien composite $x \geq 0$, est maintenant issu du travail soit $R = w(T - l)$. Notons l'utilité $U(l, x)$ et le prix d'une unité de bien composite p .

1. Démontrez que les conditions nécessaires à la résolution du problème sont

$$L'_l = U'_l(l, x) - w\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$L'_x = U'_x(l, x) - p\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_1 (wT - wl - px) = 0$$

$$\lambda_2 \geq 0, \lambda_2 (T - l) = 0$$

et en déduire à quelles contraintes sont liées les multiplicateurs λ_1 et λ_2 .

2. Déterminez et interprétez la solution selon que la contrainte $l \leq T$ est libre puis saturée.

Demande d'assurance. Un individu dont la fonction d'utilité est $u(z) = -\exp(-z)$ dispose d'une richesse égale à $w = 2$. La probabilité pour qu'un sinistre lui coûtant $y = 1$ survienne est évaluée à $\alpha = \frac{1}{2}$.

Montrez que la demande d'assurance optimale est $x^* = 1 - \ln\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)$ si $\rho \in \left[\frac{1}{1+e}, \frac{1}{1+e^{-1}}\right]$.

Tarification non linéaire sans asymétrie d'information. En reprenant le cadre de la tarification non linéaire, résoudre le problème de l'entreprise si l'on suppose à la fois que l'information est symétrique (*indice* : les contraintes d'incitations sont alors caduques) et que les productions peuvent être nulles, soit $\underline{q} \geq 0$ et $\bar{q} \geq 0$.

Régulation avec asymétrie d'information. Soit un régulateur public (le principal) qui désire déléguer à une entreprise régulée (l'agent), la production de $q \geq 0$ unités d'un bien donné. La valeur de ces unités pour le principal est donnée par sa fonction de surplus $S(q) = 3q - q^2$. Le coût de production de l'agent n'est pas connu du principal de manière certaine, mais ce dernier sait toutefois que le coût unitaire et marginal c est d'un niveau $c = 1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et d'un niveau $c = 2$ avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Pour tout coût possible $c \in \{1, 2\}$, le principal propose à l'agent un contrat à prendre ou à laisser, de la forme $\langle q, t \rangle$, où $t \geq 0$ est le transfert monétaire que l'agent reçoit pour son exploitation, ce qui lui procure une utilité nette $U_c = t - cq$. Le gain net du principal est donc $S(q) - t$.

1. En vous inspirant de l'application sur la tarification non linéaire, montrez que le problème du principal s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{q_1, t_1, q_2, t_2} \mathcal{E}W &= \frac{1}{3}[S(q_1) - t_1] + \frac{2}{3}[S(q_2) - t_2] \\ \text{s/c : } t_1 - q_1 &\geq 0 \text{ et } t_2 - 2q_2 \geq 0 \\ t_1 - q_1 &\geq t_2 - q_2 \text{ et } t_2 - 2q_2 \geq t_1 - 2q_1 \end{aligned}$$

2. Montrer que la solution optimale est $q_1^* = 1$ et $q_2^* = \frac{1}{4}$. Comparez avec la solution d'information symétrique.

Gestion de production et programmation linéaire. Reprendre le problème du paragraphe 1.7.1, $\max \pi = 30x_1 + 50x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 80 \\ 0 \leq x_2 \leq 70 \\ 6x_1 + 8x_2 \leq 800 \end{cases}$$

1. Montrez que les conditions nécessaires de ce problème sont

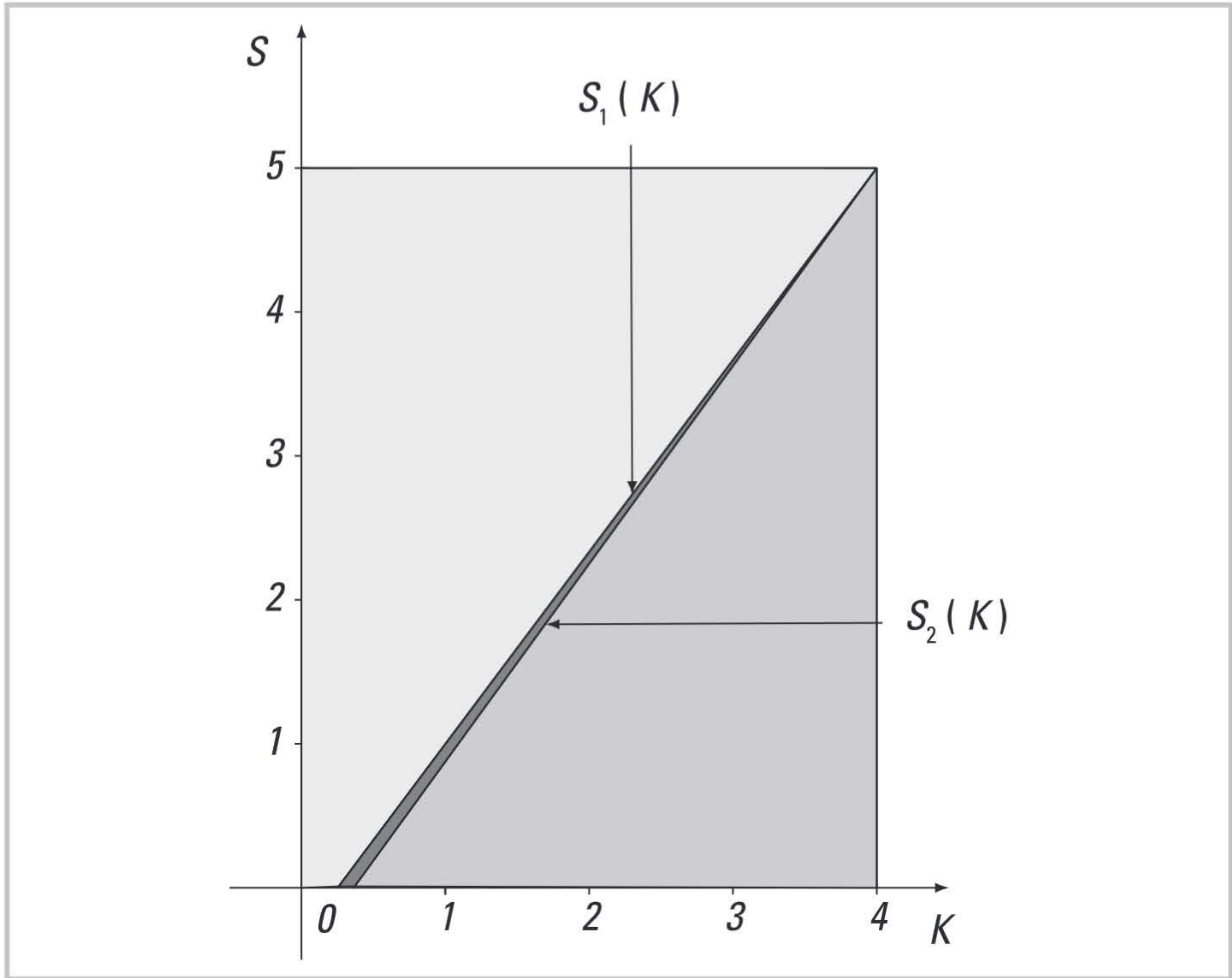
$$\begin{cases} L'_{x_1} = 30 - \lambda_1 - 6\lambda_3 \leq 0 \text{ et } x_1 L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 50 - \lambda_2 - 8\lambda_3 \leq 0 \text{ et } x_2 L'_{x_2} = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 ; \lambda_1(80 - x_1) = 0 \\ \lambda_2 \geq 0 ; \lambda_2(70 - x_2) = 0 \\ \lambda_3 \geq 0 ; \lambda_3(800 - 6x_1 - 8x_2) = 0 \end{cases}$$

2. Résolvez le problème à l'aide de ces conditions (*indice* : trouvez qu'il apparaît une contradiction si l'on suppose que les contraintes $80 - x_1 \geq 0$ et $70 - x_2 \geq 0$ sont libres et chaque fois que l'on suppose la contrainte $80 - x_1 \geq 0$ saturée. En déduire que les contraintes $70 - x_2 \geq 0$ et $800 - 6x_1 - 8x_2 \geq 0$ sont saturées à l'optimum).

Production sous contrainte. Reprendre l'exemple de la maximisation du profit à deux variables sous les contraintes de stockage et de minerai :

$$\begin{aligned} \max_{q_1, q_2} \pi_a &= -\frac{1}{2}q_1^2 + q_1(q_2 + 2) - \frac{3}{2}q_2^2 \\ \text{s/c } q_1 + 2q_2 &\leq S \\ q_1 + q_2 &\leq K \end{aligned}$$

Démontrez que la figure 1.21 est vérifiée, où $S = S_1(K) = \frac{4K-1}{3}$, $S = S_2(K) = \frac{11K-4}{8}$, l'aire gris clair (resp moyen) correspond à la saturation de la contrainte de stockage (resp. sur la ressource) et l'aire gris foncé à la saturation des deux contraintes.

**FIGURE 1.21**

Zones de saturation des contraintes

Capital risquer. Deux agents économiques sont engagés dans un projet d'affaire qui, s'il réussit, rapportera π million d'euros. L'agent A apporte du capital financier à hauteur de $x \geq 0$. L'agent B amène son travail et ses compétences techniques représentés par la variable $y \geq 0$, ce qui lui coûte $C(y)$. Les apports de chacun au projet permettent d'accroître la probabilité $p(x, y)$ de son succès.

Ex ante, l'agent A propose à l'agent B la règle de partage des gains (π) en cas de succès : pour B un paiement de w où $0 \leq w \leq \pi$ et $\pi - w$ pour A. Ainsi les gains espérés des deux parties s'écrivent

$$U_A(x, w) = p(x, y)(\pi - w) \quad \text{et} \quad U_B(y) = p(x, y)w - C(y)$$

Cependant au contraire de l'agent A, l'agent B pourrait tenter de mener le projet seul mais l'efficacité de son travail s'en trouverait réduite de moitié, et son gain espéré serait alors

$$U_B^0 = \max_y \left\{ p\left(0, \frac{1}{2}y\right)\pi - C(y) \right\}$$

Pour effectuer les calculs, on posera $\pi = 1$, $p(x, y) = x + y$ et $C(y) = \frac{1}{2}y^2$.

Conformément à la théorie des jeux, lorsque des décisions séquentielles sont prises (ici A décide avant B), un raisonnement de récurrence vers l'amont doit être mené. Cela amène à examiner les choix de B avant ceux de A.

Décision de travail B

1. Montrez que la fonction $U_B(y)$ est (i) à différences croissantes par rapport à w et (ii) strictement concave par rapport à y . Qu'en déduisez-vous ?
2. Montrez que, si la règle de partage est w et le financement x , l'effort optimal de travail que B fournira maximise $U_B(y)$ et est égal à $y^* = w$.
3. Calculez la valeur optimale $U_B(y^*)$ (que l'on notera $U_B^*(x, w)$) et montrez que $U_B^0 = \frac{1}{8}$.

Décision de financement de A

Anticipant que si B participe au projet, il fera l'effort $y^* = w$ et gagnera $U_B^*(x, w)$ mais qu'il obtiendra U_B^0 s'il travaille en solo, le problème de l'agent A s'écrit

$$\begin{cases} \max_{(x, w)} U_A(x, w) \\ U_B^*(x, w) \geq U_B^0 \\ 1 \geq w \geq 0 \\ 1 \geq x + w \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

La dernière contrainte est une contrainte de cohérence de la probabilité de succès : $p(x, y^*) \leq 1$.

1. Montrez que $U_A(x, w)$ et $U_B^*(x, w)$ ne sont pas concaves mais quasi-concaves.
2. Écrivez les conditions nécessaires d'optimalité du problème (\mathcal{P}) . Sont-elles suffisantes ?
3. Cherchez le seul point candidat. Est-il le maximum recherché ?

Dualité. Soit le problème de maximisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \max f(\mathbf{x}) = 20 + x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 2 - x_1 - x_2 - x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminez la solution optimale en exprimant celle-ci comme une fonction de λ .
2. À l'aide de cette expression, écrivez la valeur optimale du lagrangien comme une fonction de λ . Minimisez $L(\lambda)$ par rapport à λ sachant que $\lambda \geq 0$. Quelle est la valeur de λ ?
3. Que peut-on dire du quadruplet $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)$ vis-à-vis du lagrangien du problème ?

2

OPTIMISATION DYNAMIQUE

SOMMAIRE

2.1	L'idée de dynamique : un exemple	86
2.2	Problème dynamique : de l'exemple au cas général	88
2.3	Contrôle optimal	90
2.4	Programmation dynamique	111
2.5	Applications	124
2.6	Exercices	157

L'optimisation dynamique fait référence à un problème qui se déroule sur plusieurs périodes. Toutefois, on verra dans les applications que l'on peut associer l'idée de dynamique à d'autres situations comme l'asymétrie d'information. Mais la référence au temps étant la plus intuitive, conservons-la. Pour préciser cette notion, revenons à l'exploitation d'un minerai. Celle-ci ne se fait pas en un instant et nécessite du temps. Pour autant, pourquoi ce problème est-il un vrai problème dynamique ? C'est ce que l'on montre dans la première section. La section 2 présente la formulation générale d'un problème dynamique. Les sections 3 et 4 abordent deux méthodes de résolution, le contrôle optimal et la programmation dynamique¹. On expose celles-ci en commençant par le cas discret, puis le cas continu. L'aspect discret est présenté essentiellement dans un but pédagogique. En revanche, la rigueur de l'analyse et des interprétations est plus centrée sur l'aspect continu.

2.1 L'IDÉE DE DYNAMIQUE : UN EXEMPLE

Supposons que pour exploiter le minerai, le producteur dispose de 3 périodes. Par convention, disons qu'il commence à la période 1 et s'arrête à la période 3. À chaque période t , $t = 1, 2, 3$ le producteur doit choisir la quantité qu'il extrait. L'extraction q dépend donc de la période en cours t . Notons $q(t)$ la quantité fonction de la période t et étudions son influence sur le problème.

Premièrement, examinons les gains de l'exploitant. Tout d'abord, la quantité $q(t)$ influence le profit π de la période t , $t = 1, 2, 3$, soit $\pi(q(t))$. Ensuite, afin de mesurer l'impact de ce profit au moment où commence le problème (la période 1), le producteur utilise un facteur d'actualisation, noté β avec $\beta < 1$. Elevé à la puissance $t - 1$, il permet au producteur d'évaluer à la date initiale la valeur d'un euro de profit à la date t . Le profit de la période t , $t = 1, 2, 3$, évalué à la période 1, c'est-à-dire le profit actualisé devient $\beta^{t-1}\pi(q(t))$. Enfin, la totalité des gains générés par l'exploitation se mesure à l'aide de la somme des profits actualisés, soit :

$$\pi(q(1)) + \beta^1 \pi(q(2)) + \beta^2 \pi(q(3))$$

Deuxièmement, analysons l'impact de $q(t)$ sur la contrainte de minerai. Le principe de cette contrainte est toujours le même, à savoir que le producteur ne peut extraire plus qu'il ne dispose. Notons S la taille du gisement. Comme il extrait $q(1)$, puis $q(2)$ et enfin $q(3)$, la contrainte se matérialise de la façon suivante :

$$q(1) + q(2) + q(3) \leq S$$

Autrement dit, la somme des extractions ne peut excéder la taille du gisement.

¹ Nous n'aborderons pas le calcul des variations qui constitue une troisième méthode de résolution des problèmes dynamiques. Sur l'optimisation dynamique en général, le lecteur peut se référer aux ouvrages de Kamien et Schwartz (1991) et de Seierstad et Sydsaeter (1987).

En définitive le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{q(1), q(2), q(3)} \quad & \pi(q(1)) + \beta^1 \pi(q(2)) + \beta^2 \pi(q(3)) \\ \text{s/c} \quad & q(1) + q(2) + q(3) \leq S \end{aligned}$$

Il apparaît alors que c'est l'existence de la contrainte qui rend le problème dynamique. En effet, pour choisir la quantité qu'il extrait à la date 3, le producteur doit tenir compte du fait que l'extraction a commencé deux périodes plus tôt et que le gisement restant à sa disposition est $S - q(1) - q(2)$. La quantité $q(3)$ maximum qu'il est possible d'extraire dépend donc de ce qui a été décidé aux périodes précédentes. De même, à la période 2, ce qu'il peut prélever dans le gisement est au plus $S - q(1)$. C'est la présence de cette dépendance, à savoir que ce qui est possible à une période dépend de ce qui a été réalisé au cours des périodes passées, qui crée un problème dynamique.

Ainsi, pour un problème de production sur trois périodes dans lequel la contrainte de minerai disparaîtrait, la production de la période 2 (resp. 3) ne serait plus dépendante de ce qui a été effectué à la période précédente (resp. aux périodes précédentes). La dynamique disparaîtrait également. En définitive, la solution du problème serait celle du problème libre statique à chaque période.

En conclusion, ce n'est pas tant le fait d'avoir une production qui s'étend sur trois périodes qui rend dynamique ce problème mais la contrainte qui fait qu'à chaque période, ce qu'il est possible de faire dépend de ce qui a déjà été réalisé.

Finissons cette présentation en précisant deux points. L'écriture du problème peut être condensée en utilisant l'opérateur Somme, soit :

$$\begin{aligned} \max_{q(t)} \quad & \sum_{t=1}^3 \beta^{t-1} \pi(q(t)) \\ \text{s/c} \quad & \sum_{t=1}^3 q(t) \leq S \end{aligned}$$

Puis, si le nombre de périodes durant lequel dure l'exploitation n'est plus fixé à 3, mais devient quelconque et égal à T , le problème se note :

$$\begin{aligned} \max_{q(t)} \quad & \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \pi(q(t)) \\ \text{s/c} \quad & \sum_{t=1}^T q(t) \leq S \end{aligned}$$

Le principe de base d'un problème dynamique étant posé, étudions-le en détail.

2.2 PROBLÈME DYNAMIQUE : DE L'EXEMPLE AU CAS GÉNÉRAL

Comme on vient de le montrer, la dynamique implique qu'il existe une dépendance dans le temps entre ce qu'un agent économique peut effectuer à une période et ce qu'il a déjà réalisé aux périodes précédentes. Cette dépendance fait que l'on ne peut pas appliquer sans difficultés les techniques développées dans le chapitre précédent pour la recherche d'un maximum. Pour progresser, il est nécessaire, dans un premier temps, de séparer les variables qui sont liées dans le temps de celles qui ne le sont pas.

2.2.1 Variables d'état et de contrôle

Reprenons le problème d'exploitation d'une ressource non renouvelable et démontrons que dans ce type de problème, la taille du gisement est soumise à une dépendance temporelle. Notons $s(t)$ le niveau du gisement au début de la période t . Celui-ci est égal au gisement initial S , diminué des quantités extraites jusqu'en $t - 1$, soit :

- à la période 1, $s(1) = S$
- à la période 2, $s(2) = S - q(1)$
- à la période 3, $s(3) = S - q(1) - q(2)$
- à la période 4 (qui suit l'arrêt de l'exploitation), $s(4) = S - q(1) - q(2) - q(3)$

En combinant les variables de gisement lors de deux périodes successives, on obtient :

$$\begin{aligned}s(1) &= S \\s(2) &= s(1) - q(1) \\s(3) &= s(2) - q(2) \\s(4) &= s(3) - q(3)\end{aligned}$$

Dit autrement, la taille du gisement au début d'une période donnée correspond à la taille du gisement de la période précédente diminué de l'extraction de cette même période. Ce qui est plus intéressant est de constater que le niveau de ressource non-renouvelable est régi par 3 contraintes (plus précisément 3 liaisons) qui lient le niveau du gisement de la période $t + 1$, $s(t + 1)$, à celui de la période t , $s(t)$ de la façon suivante :

$$s(t + 1) = s(t) - q(t), t = 1, 2, 3$$

Cette contrainte est qualifiée de contrainte de mouvement (ou équation de mouvement) car elle décrit la façon dont le gisement évolue nécessairement dans le temps. De plus, comme en $t + 1$, le stock dépend du niveau (ou de l'état) de l'ensemble des variables à l'instant t , on le qualifie de variable d'état.

En revanche, la quantité extraite $q(t)$ ne présentant pas de dépendance temporelle, elle est qualifiée de variable de contrôle. Le producteur fait face à deux catégories de variables de décision dans un problème dynamique : celles d'état et celles de contrôle.

De façon évidente, ce constat demeure si le nombre de périodes devient quelconque et égal à T . Le seul élément qui évolue est le nombre de contraintes traduisant le mouvement de la variable d'état. Au lieu d'en avoir 3, il en existe T . Dès lors, la notation pertinente du problème comprenant T périodes devient :

$$\begin{aligned} & \max_{q(t)} \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \pi(q(t)) \\ & s/c \quad s(t+1) = s(t) - q(t) \\ & s(1) = S, \quad s(T+1) = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'écriture du problème dynamique doit faire apparaître la fonction objectif, la contrainte de mouvement à l'instant t et les valeurs de la variable d'état aux périodes initiale et finale. Remarquons ici que l'on formule l'hypothèse que le producteur épuise la ressource à la période finale T , de sorte qu'une période plus tard (en $T+1$), le gisement est nul².

2.2.2 Formulation du problème dans le cas général

Posons un problème pour lequel à chaque période $t = 1, 2, \dots, T$, la fonction objectif est $f(x(t), y(t), t)$. Cette fonction dépend du temps t et de deux variables, $y(t)$ et $x(t)$. On suppose que $x(t)$ constitue la variable de contrôle, c'est-à-dire ne subit pas de dépendance dans le temps et que $y(t)$ est la variable d'état, dans le sens où son évolution est guidée par la contrainte de mouvement suivante :

$$y(t+1) = y(t) + g(x(t), y(t), t)$$

La fonction g reflète la transition de la variable d'état entre deux périodes successives, c'est-à-dire la façon dont elle évolue. Pour être le plus général possible, on considère que la fonction objectif et l'équation de mouvement dépendent également de la variable d'état et du temps (contrairement à l'exemple utilisé jusqu'à présent).

On débute par l'étude du problème dynamique le plus simple qui considère les valeurs de la variable d'état aux périodes finale et initiale comme données. On les note $y(1) = y_1$ et $y(T+1) = y_{T+1}$. Le problème s'écrit sous la forme PD_1 :

$$\begin{aligned} & \max_{x(t)} \sum_{t=1}^T f(x(t), y(t), t) \\ & s/c \quad y(t+1) = y(t) + g(x(t), y(t), t) \\ & y(1) = y_1, \quad y(T+1) = y_{T+1} \end{aligned}$$

² Nous verrons par la suite d'autres types de conditions.

Dans les sections suivantes, deux méthodes de résolution vont être présentées : le contrôle optimal et la programmation dynamique.

2.3 CONTRÔLE OPTIMAL

2.3.1 Recherche de la solution en temps discret

Le problème PD_1 contenant T fois la contrainte de mouvement, $y(t) - y(t+1) + g(x(t), y(t), t) = 0$, on peut introduire un lagrangien en associant T multiplicateurs, un pour chaque liaison de l'instant t . Afin de procéder par étapes, on commence par considérer qu'il n'y a que 3 périodes, soit $T = 3$. Sachant que les valeurs de la variables d'état aux périodes initiale et finale sont données par $y(1) = y_1$ et $y(4) = y_4$, on peut les introduire directement dans le lagrangien qui devient :

$$\begin{aligned} L = & f(x(1), y_1, 1) + f(x(2), y(2), 2) + f(x(3), y(3), 3) \\ & + \lambda(1)(y_1 - y(2) + g(x(1), y_1, 1)) \\ & + \lambda(2)(y(2) - y(3) + g(x(2), y(2), 2)) \\ & + \lambda(3)(y(3) - y_4 + g(x(3), y(3), 3)) \end{aligned}$$

La difficulté est que la recherche d'un contrôle optimal à une date donnée influence non seulement la fonction objectif, mais aussi la variable d'état qui, en retour, joue sur l'objectif. Il faut donc que le choix d'un contrôle tienne compte de ces effets directs et indirects.

En appliquant le théorème de Lagrange (théorème 1.14, paragraphe 1.5.1), on peut montrer que les conditions nécessaires pour trouver un maximum sont :

$$\begin{aligned} L'_{x(1)} &= f'_{x(1)}(x(1), y_1, 1) + \lambda(1)g'_{x(1)}(x(1), y_1, 1) = 0 \\ L'_{x(2)} &= f'_{x(2)}(x(2), y(2), 2) + \lambda(2)g'_{x(2)}(x(2), y(2), 2) = 0 \\ L'_{x(3)} &= f'_{x(3)}(x(3), y(3), 3) + \lambda(3)g'_{x(3)}(x(3), y(3), 3) = 0 \\ L'_{\lambda(1)} &= y(2) - y_1 - g(x(1), y_1, 1) = 0 \\ L'_{\lambda(2)} &= y(3) - y(2) - g(x(2), y(2), 2) = 0 \\ L'_{\lambda(3)} &= y_4 - y(3) - g(x(3), y(3), 3) = 0 \\ L'_{y(2)} &= f'_{y(2)}(x(2), y(2), 2) - \lambda(1) + \lambda(2)(1 + g'_{y(2)}(x(2), y(2), 2)) = 0 \\ L'_{y(3)} &= f'_{y(3)}(x(3), y(3), 3) - \lambda(2) + \lambda(3)(1 + g'_{y(3)}(x(3), y(3), 3)) = 0 \end{aligned}$$

Il est important de constater que les conditions nécessaires correspondant à chaque type de variable sont similaires d'une période à l'autre. On peut donc généraliser facilement le problème à T périodes. Le lagrangien prend la forme :

$$L = \sum_{t=1}^T [f(x(t), y(t), t) + \lambda(t)(y(t) - y(t+1) + g(x(t), y(t), t))]$$

En se rappelant que la variable de contrôle $x(t)$ n'influence que la période t et que la variable d'état $y(t)$ a un impact sur les périodes t et $t - 1$ à travers l'équation de mouvement, les conditions nécessaires d'optimalité se généralisent comme suit :

$$\begin{aligned} L'_{x(t)} &= f'_{x(t)}(x(t), y(t), t) + \lambda(t)g'_{x(t)}(x(t), y(t), t) = 0, t = 1, 2, \dots, T \\ L'_{\lambda(t)} &= y(t+1) - y(t) - g(x(t), y(t), t) = 0, t = 1, 2, \dots, T \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$L'_{y(t)} = f'_{y(t)}(x(t), y(t), t) - \lambda(t-1) + \lambda(t)(1 + g'_{y(t)}(x(t), y(t), t)) = 0, t = 2, 3, \dots, T$$

avec $y(1) = y_1$ et $y(T+1) = y_{T+1}$.

En dépit de la similarité d'une période à l'autre des conditions nécessaires selon le type de variable, le système d'équation précédent présente l'inconvénient de manquer de lisibilité. C'est pourquoi, afin de gagner en clarté tant sur l'écriture que sur les interprétations, les problèmes dynamiques font intervenir une autre fonction auxiliaire que le lagrangien. Il s'agit de la fonction hamiltonien.

A. Le hamiltonien et les conditions nécessaires

Cette fonction auxiliaire s'écrit :

$$H(x(t), y(t), \lambda(t), t) = f(x(t), y(t), t) + \lambda(t)g(x(t), y(t), t)$$

où $\lambda(t)$ est désormais appelée variable adjointe (ou de co-état). En commettant un léger abus de notation, on note le hamiltonien $H(t) = H(x(t), y(t), \lambda(t), t)$.

On peut établir le théorème suivant en reliant la fonction $H(t)$ et les conditions nécessaires du système (2.1).

Théorème 2.1 (Principe du maximum en temps discret) *Les conditions nécessaires associées au problème P_{D_1} sont :*

$$\begin{aligned} H'_{x(t)}(t) &= 0, t = 1, 2, \dots, T \\ y(t+1) - y(t) &= H'_{\lambda(t)}(t), t = 1, 2, \dots, T \\ \lambda(t) - \lambda(t-1) &= -H'_{y(t)}(t), t = 2, 3, \dots, T \\ \text{avec } y(1) &= y_1 \text{ et } y(T+1) = y_{T+1} \end{aligned}$$

Ces conditions correspondent aux conditions nécessaires énoncées par le Principe du maximum de Pontryagin. Les deux premières sont familières. La première fait intervenir la dérivée partielle du hamiltonien par rapport à la variable de contrôle $x(t)$. Puisque cette variable à chaque instant t n'est soumise à aucune contrainte, elle doit être utilisée de façon à en retirer le plus de bénéfice à chaque période comme dans un problème d'optimisation statique. On recherche donc le niveau de la variable de

contrôle qui maximise le hamiltonien : comme le problème est libre, le théorème 1.3 du paragraphe 1.3.1 indique que c'est le cas lorsque $H'_{x(t)}(t)$ s'annule.

La deuxième fait appel à la dérivée partielle de $H(t)$ par rapport à la variable adjointe $\lambda(t)$ (c'est-à-dire le multiplicateur associé à la liaison). Comme en optimisation statique, cette dérivée rappelle que la variable d'état est régie par la contrainte du problème, à savoir l'équation de mouvement.

La troisième condition est nouvelle et utilise la dérivée partielle par rapport à la variable d'état $y(t)$. Elle indique l'évolution que doit suivre la variable adjointe à travers la différence entre $\lambda(t)$ et $\lambda(t-1)$. Plus précisément, cette évolution correspond à l'opposé de la variation du hamiltonien suite à une évolution infinitésimale de la variable d'état, soit $-H'_{y(t)}(t)$.

Résolution : En termes algébriques, les équations régissant l'évolution des variables d'état et adjointe constituent un système d'équations récurrentes. On n'aborde pas les méthodes de résolution de ce type d'équation excepté le cas linéaire (voir la remarque de l'annexe C.2).

B. Interprétation de la variable adjointe : une première approche

On peut donner du sens à la troisième condition en se référant à l'optimisation statique. On a montré dans la section 1.4 que, dans ce cas, le multiplicateur traduit l'impact de la contrainte sur la fonction objectif car, d'une part, elle agit une fois pour toutes sur le problème et, d'autre part, son niveau (fourni par le paramètre à ne pas dépasser) est invariable.

En dynamique, ces deux conditions ne sont pas remplies (sauf exceptions) et il n'est plus possible de définir immédiatement la variable adjointe à l'instant t . En effet, même s'il existe un multiplicateur par contrainte, celle-ci désormais traduit le mouvement de la variable d'état. Ainsi, elle n'agit pas qu'à un instant donné car si une modification est décidée, celle-ci se répercute sur l'ensemble des périodes suivantes. Par ailleurs, en dynamique, le niveau de la contrainte en t correspond à la variable d'état en t , qui, par définition, n'est donc plus invariable comme en statique. La condition nécessaire résume ces deux points : à un instant donné, il n'est plus possible de mesurer l'influence de la contrainte mais simplement l'évolution de son impact via la différence de deux variables adjointes successives.

Par analogie avec le cadre statique, la variable adjointe mesure le coût marginal lié au fait que la variable d'état est contrainte dans son évolution. Elle peut donc aussi s'interpréter comme le prix implicite de la variable d'état à l'instant t^3 .

³ Ce point sera précisé avec plus de rigueur lorsque le temps deviendra continu.

Le cas du producteur : On a $f = \beta^{t-1}\pi(q(t))$ et $g = -q(t)$. Le hamiltonien s'écrit :

$$H(t) = \beta^{t-1}\pi(q(t)) - \lambda(t)q(t)$$

où $\lambda(t)$ est la variable adjointe à la variable de gisement. Les conditions nécessaires du Principe du maximum sont $\forall t$:

$$H'_{q(t)}(t) = \beta^{t-1}\pi'(q(t)) - \lambda(t) = 0$$

$$s(t+1) - s(t) = H'_{\lambda(t)}(t) = -q(t)$$

$$\lambda(t) - \lambda(t-1) = -H'_{s(t)}(t) = 0$$

La première condition indique que la quantité de chaque période $q(t)$ doit être telle que le profit marginal actualisé $\beta^{t-1}\pi'(q(t))$ soit égal à $\lambda(t)$ c'est-à-dire au coût marginal associé à l'équation de mouvement du gisement de ressource. La dernière précise que $\lambda(t) = \lambda(t-1) = \lambda_0$ autrement dit que le coût marginal associé à la contrainte de mouvement est constant d'une période à l'autre. Le producteur est donc prêt à payer jusqu'à λ_0 pour disposer d'un accroissement infinitésimal de ressource.

Exemple : En guise d'application numérique, prenons la fonction utilisée dans le cas statique comme mesure du profit à la période t , soit $\pi_e(q(t)) = 12q(t) - \frac{3}{2}q(t)^2 - 12$. Supposons que $\beta = \frac{1}{2}$, $T = 2$ et $S = 6$ (on conservera ces spécifications par la suite). On a :

$$H(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} (12q(t) - \frac{3}{2}q(t)^2 - 12) - \lambda(t)q(t)$$

Les conditions nécessaires deviennent :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} (12 - 3q(t)) - \lambda(t) = 0$$

$$s(t+1) - s(t) = -q(t)$$

$$\lambda(t) - \lambda(t-1) = 0$$

De la dernière équation, on a que la variable adjointe est une constante. Posons $\lambda(t) = \lambda(t-1) = \lambda_0$. En utilisant cette valeur dans la première condition, on a :

$$q(t) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \frac{\lambda_0}{3}$$

On déduit la valeur de λ_0 à partir de la contrainte portant sur la ressource, soit :

$$\sum_{t=1}^2 q(t) = \sum_{t=1}^2 \left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \frac{\lambda_0}{3} \right) = 6 \Leftrightarrow 8 - \frac{1+2}{3} \lambda_0 = 6$$

soit $\lambda_0 = 2$ qui mesure le coût marginal de la contrainte, c'est-à-dire la rareté de la ressource non-renouvelable. Ainsi, lorsque la ressource se réduit d'une unité physique, à toute date, le producteur est prêt à payer 2 euros pour « reconstituer » le stock perdu. Dès lors, à la période 1, le producteur doit extraire $q(1) = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ et à la période 2, $q(2) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

2.3.2 Solution en temps continu

A. Conditions nécessaires

Jusqu'à présent, on a implicitement raisonné en temps discret en considérant que le pas de temps, c'est-à-dire la variation de temps entre deux périodes consécutives était de 1. Mais c'est une convention. Plus généralement, le pas de temps est quelconque.

À la limite, il est même continu. Ainsi, dans un problème d'exploitation de ressource, le minerai est extrait continuellement du gisement. Comment le problème PD_1 s'écrit-il quand on passe du temps discret au temps continu ? Il s'ensuit quatre conséquences :

- le pas de temps devient infinitésimal. Donc, l'instant initial devient 0 tandis que l'instant final demeure T ;
- le mouvement de la variable d'état est donné par son taux d'évolution instantané, ce qui correspond à sa dérivée, ainsi la contrainte de mouvement s'écrit comme une équation différentielle (voir annexe C.2) :

$$y'(t) = g(x(t), y(t), t)$$

- la fonction objectif devient la somme de $f(x(t), y(t), t)$ pour une variable t allant de 0 à T de façon continue, ce qui est la définition d'une intégrale (voir annexe B.1). On a donc :

$$\int_0^T f(x(t), y(t), t) dt$$

- les états initial et final se notent $y(0) = y_0$ et $y(T) = y_T$.

Le problème formulé en continu devient PD_2 :

$$\begin{aligned} \max_{x(t)} \int_0^T f(x(t), y(t), t) dt \\ s/c \quad y'(t) = g(x(t), y(t), t) \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T \end{aligned}$$

La conséquence de cette formulation est qu'il existe un continuum de contraintes de mouvement. On peut donc introduire un continuum de multiplicateurs et poser le lagrangien :

$$L = \int_0^T f(x(t), y(t), t) dt + \int_0^T \lambda(t)(-y'(t) + g(x(t), y(t), t)) dt$$

L'inconvénient de cette écriture est qu'elle n'est pas opérationnelle car la variable d'état est présente sous forme de dérivée. Il faut donc procéder à une transformation. Puisque l'opérateur intégrale est un opérateur linéaire, le lagrangien s'écrit aussi :

$$L = \int_0^T \{f(x(t), y(t), t) + \lambda(t)g(x(t), y(t), t)\} dt - \int_0^T \lambda(t)y'(t) dt$$

d'où, en intégrant par parties le dernier terme (voir annexe B.1), on tire :

$$L = \int_0^T \{f(x(t), y(t), t) + \lambda(t)g(x(t), y(t), t) + \lambda'(t)y(t)\} dt - \lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0)$$

On reconnaît dans les deux premiers termes des accolades la fonction hamiltonien. On a en définitive :

$$L = \int_0^T \{H(t) + \lambda'(t)y(t)\} dt - \lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0) \quad (2.2)$$

On est en mesure de dériver des conditions nécessaires d'optimalité analogues à celles qui prévalent en temps discret pour obtenir le Principe du maximum de Pontryagin en temps continu. Le théorème est démontré dans l'annexe D.3.

Théorème 2.2 (Principe du maximum en temps continu). *Les conditions nécessaires associées au problème PD_2 sont $\forall t$:*

$$H'_{x(t)}(t) = 0 \quad (2.3)$$

$$y'(t) = H'_{\lambda(t)}(t) \quad (2.4)$$

$$\lambda'(t) = -H'_{y(t)}(t) \quad (2.5)$$

Il est important (et rassurant) de noter que le temps continu ne modifie pas le principe de la solution, mis à part que les évolutions des variables d'état et de la variable adjointe se matérialisent désormais à travers des équations différentielles traduisant le taux d'évolution instantané de ces deux variables. Ce constat découle du fait que le problème à résoudre reste fondamentalement le même quelle que soit la nature du temps.

Résolution : Elle est similaire au cas discret, sauf que le système de deux équations à résoudre est un système de deux équations différentielles en lieu et place de deux équations récurrentes. Ce système possède deux conditions aux bornes pour le résoudre $y(0) = y_0$ et $y(T) = y_T$. L'annexe C.2 fournit les éléments de base pour la résolution des équations différentielles.

Le temps continu permet de procéder à des interprétations plus avancées.

B. Interprétations

Variable adjointe. L'interprétation est analogue au cas discret. Notamment, on a fait le parallèle entre l'interprétation de la variable adjointe et celle d'un multiplicateur en statique. Le temps continu permet de préciser rigoureusement cet aspect. Pour cela, définissons pour chaque instant $t \in [0, T]$ la fonction valeur $V(t, y(t))$ du problème commençant à l'instant t avec l'état $y(t)$ et évaluée pour les valeurs optimales des variables de contrôle et d'état. À l'aide de calculs équivalents à ceux précédents le théorème 2.2, on a :

$$\begin{aligned} V(t, y(t)) &= \int_t^T f(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau \\ &= \int_t^T \{H(\tau) + \lambda'(\tau)y(\tau)\} d\tau - \lambda(T)y(T) + \lambda(t)y(t) \end{aligned}$$

où $\lambda(t)$ est un multiplicateur arbitraire. Calculons la valeur marginale de l'état $y(t)$ en date t soit

$$V'_{y(t)}(y(t), t) = \int_t^T \left[\left(H'_{y(\tau)}(\tau) + \lambda'(\tau) \right) \frac{dy(\tau)}{dy(t)} + H'_{x(\tau)}(\tau) \frac{dx(\tau)}{dy(t)} + H'_{\lambda(\tau)}(\tau) \frac{d\lambda(\tau)}{dy(t)} \right] d\tau + \lambda(t)$$

donc si le théorème 2.2 est vrai pour tout $\tau \in [t, T]$ et comme ici $\lambda(\tau)$ est arbitraire alors

$$H'_{x(\tau)}(\tau) = H'_{y(\tau)}(\tau) + \lambda'(\tau) = \frac{d\lambda(\tau)}{dy(t)} = 0$$

d'où l'on déduit le théorème suivant :

Théorème 2.3 (Variable adjointe optimale). *La variable adjointe à l'instant t est telle que :*

$$\lambda(t) = V'_{y(t)}(y(t), t)$$

La variable adjointe à la variable d'état correspond à la dérivée partielle de la fonction valeur par rapport à la variable d'état. Une interprétation identique à celle menée en statique est possible : à un instant t , la variable adjointe est le prix implicite de la variable d'état. Précisons que celui-ci peut être de signe positif ou négatif car la variable d'état est contrainte par une liaison.

Hamiltonien. Reprenons les fonctions composant le hamiltonien : à la date t , f décrit la valeur instantanée de l'objectif, tandis que g représente l'évolution de l'état. Comme $\lambda(t)$ est le prix implicite de cette évolution dans l'objectif, le produit λg est la valeur implicite des perspectives futures de l'objectif. En définitive, le hamiltonien est la somme des valeurs courantes de l'objectif et de ses perspectives à venir :

$$H(t) = \underbrace{f(x(t), y(t), t)}_{\text{valeur instantanée}} + \underbrace{\lambda(t)g(x(t), y(t), t)}_{\text{valeur future}}$$

La fonction $H(t)$ s'interprète donc comme une fonction statique prenant en compte les conséquences instantanées et futures des variables de contrôle et d'état à la période t .

Conditions nécessaires. Concernant le contrôle, à chaque période, la décision optimale doit assurer un équilibre à la marge entre deux types de contributions

$$\underbrace{f'_{x(t)}(x(t), y(t), t)}_{=A} + \underbrace{\lambda(t)g'_{x(t)}(x(t), y(t), t)}_{=B} = 0$$

A représente la contribution marginale du contrôle à l'objectif instantané : la valeur marginale courante du contrôle. B mesure la contribution marginale du contrôle aux perspectives futures de l'objectif : la valeur marginale future du contrôle. À l'optimum, les deux contributions doivent s'équilibrer.

Concernant l'état optimal, il doit vérifier à chaque période

$$\underbrace{f'_{y(t)}(x(t), y(t), t)}_{=C} + \underbrace{\lambda(t)g'_{y(t)}(x(t), y(t), t)}_{=D} = -\lambda'(t)$$

Le terme C est la contribution marginale de l'état à l'objectif instantané. Quant à D , il traduit l'impact marginal de l'état sur la valeur future de l'objectif. La somme de ces contributions marginales doit être égale à $-\lambda'(t)$, soit le taux de dépréciation (appréciation

s'il est négatif) de la valeur implicite de l'état. À l'optimum, la valeur d'une unité de variable d'état se déprécie au taux de sa contribution marginale courante et future à l'objectif total.

On a donc que les bénéfices nets présents et futurs de la détention d'une unité de la variable d'état ($C + D$) et le gain spéculatif sur la valeur de l'état $\lambda'(t)$ doivent se compenser.

Le cas du producteur : Pour le producteur de ressource non renouvelable, le mouvement de la variable d'état devient en temps continu :

$$s'(t) = -q(t)$$

sachant que le gisement à l'instant initial est $s(0) = S$, et celui de l'instant final devient $s(T) = 0$. La fonction objectif se modifie comme $\int_0^T e^{-rt} \pi(q(t)) dt$ où e^{-rt} est le taux d'actualisation instantané à la date t . Le problème est :

$$\begin{aligned} \max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} \pi(q(t)) dt \\ s/c \quad s'(t) = -q(t) \\ s(0) = S, \quad s(T) = 0 \end{aligned}$$

Le hamiltonien devient :

$$H(t) = e^{-rt} \pi(q(t)) - \lambda(t) q(t)$$

où $\lambda(t)$ est la variable adjointe à la variable d'état. Les conditions nécessaires du Principe du maximum sont $\forall t$:

$$\begin{aligned} H'_{q(t)}(t) &= e^{-rt} \pi'(q(t)) - \lambda(t) = 0 \\ s'(t) &= H'_{\lambda(t)}(t) = -q(t) \\ \lambda'(t) &= -H'_{s(t)}(t) = 0 \end{aligned}$$

La quantité optimale à extraire du gisement à chaque instant est telle que $e^{-rt} \pi'(q(t))$, ici le profit marginal actualisé, soit égal à $\lambda(t)$, ici le coût marginal (constant, puisque $\lambda'(t) = 0$) associé à la contrainte de mouvement sur le gisement. En effet, la contribution de l'extraction au profit instantané est bien la valeur actualisée du profit marginal car chaque unité produite rapporte un supplément de profit $\pi'(q(t))$ que l'on doit actualiser. De même, la contribution marginale de l'extraction aux perspectives futures de profit est traduite par le coût marginal associé à l'épuisement du gisement du fait de cette extraction, soit $-\lambda(t)$.

Concernant la trajectoire optimale du gisement, ici les contributions marginales de celui-ci au profit instantané et sur la valeur future du profit sont nulles car il n'influence ni le profit courant ni sa propre évolution. Il est donc logique que son taux de dépréciation soit nul. Ainsi $\lambda(t)$ reste constant. Il correspond alors au prix du minerai encore dans le sous-sol. On parle de rente de rareté. Le producteur est dans une situation où ce prix n'évolue pas d'une période sur l'autre.

Exemple : Avec les spécifications du cas discret (paragraphe 2.3.1) et en retenant comme taux d'actualisation continu $r = \frac{1}{2}$, les conditions nécessaires deviennent :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t}{2}} (12 - 3q(t)) - \lambda(t) &= 0 \\ \lambda'(t) &= 0 \\ s'(t) &= -q(t) \end{aligned}$$

En observant que la variable adjointe doit être une constante que l'on pose égale à λ_0 , puis en suivant une démarche similaire au cas discret, on trouve que :

$$q(t) = 4 - e^{\frac{t}{2}} \frac{\lambda_0}{3}$$

et que λ_0 se déduit implicitement de :

$$\int_0^2 q(t) dt = \int_0^2 \left(4 - e^{\frac{t}{2}} \frac{\lambda_0}{3} \right) dt = 8 - 2(e - 1) \frac{\lambda_0}{3} = 6$$

d'où $\lambda_0 \approx 1,74$. Par conséquent la quantité extraite à chaque instant t est $q(t) = 4 - 0,58 \times e^{\frac{t}{2}}$.

2.3.3 Conditions de transversalité

On vient d'étudier le problème dynamique dans son expression la plus simple car les valeurs de la variable d'état à l'instant initial et à l'instant final étaient données. Ce n'est pas nécessairement le cas. Pour le comprendre, il suffit de considérer une nouvelle fois l'exploitant d'un minéral. On a supposé jusqu'ici qu'il épuisait le gisement. On avait donc la liaison de la forme $S(T) = 0$. Mais de façon concrète, rien ne l'y oblige. La véritable situation à laquelle il est confronté est $S(T) \geq 0$. Le gisement à l'instant final est donc contraint plutôt que lié.

Comme on va le voir, d'autres situations peuvent apparaître aux instants initial et final. Mais elles ont toutes pour implication d'offrir des degrés de liberté supplémentaires dans l'optimisation. De nouvelles conditions nécessaires apparaissent, appelées conditions de transversalité. Celles-ci sont obtenues en appliquant les règles d'optimisation désormais usuelles au lagrangien de l'équation (2.2). Ces conditions fournissent de nouvelles conditions aux bornes qui se substituent aux précédentes pour résoudre le système de deux équations différentielles. Étudions tour à tour les cas qui peuvent se présenter.

A. La variable d'état à l'instant final n'est plus donnée

Ce cas amène à considérer deux situations.

La variable d'état à l'instant final est libre. Comme la variable d'état à l'instant final n'est plus contrainte de quelque façon que ce soit, elle devient une variable de décision à part entière. En appliquant le théorème 1.3, section 1.3 au lagrangien 2.2 à l'instant T , on obtient la condition nécessaire :

$$L'_{y(T)} = \lambda(T) = 0$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.4 (Condition de transversalité 1). *Lorsque la variable d'état à l'instant final est libre, aux conditions nécessaires (2.3)-(2.5) s'ajoute la condition de transversalité*

$$\lambda(T) = 0$$

Economiquement, ce théorème indique que le prix implicite de la variable d'état est nul à l'instant final. Cela est logique, puisqu'en choisissant sa valeur sans contrainte, le coût associé au respect d'une liaison disparaît alors qu'il était positif jusqu'à présent.

Par conséquent, les conditions aux bornes pour résoudre le système de deux équations différentielles deviennent $y(0) = y_0$ et $\lambda(T) = 0$. La condition aux bornes précédente pour résoudre le système, $y(T) = y_T$, est remplacée par la nouvelle condition $\lambda(T) = 0$.

La variable d'état à l'instant final est contrainte. La variable d'état à l'instant final est contrainte par une valeur y_T . Formellement, on a : $y(T) \geq y_T$. Associons à cette contrainte le multiplicateur $\mu(T)$. Le lagrangien (2.2) se généralise comme :

$$L = \int_0^T \{H(t) + \lambda'(t)y(t)\} dt - \lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0) + \mu(T)(y(T) - y_T)$$

Les conditions nécessaires issues du théorème 1.8 de la section 1.4 sont :

$$\begin{aligned} L'_{y(T)} &= -\lambda(T) + \mu(T) = 0 \\ \mu(T) &\geq 0, \mu(T)(y(T) - y_T) = 0 \end{aligned}$$

En notant que $\lambda(t) = \mu(t)$, on a :

Théorème 2.5 (Condition de transversalité 2). *Lorsque la variable d'état à l'instant final est contrainte, aux conditions nécessaires (2.3)-(2.5) s'ajoute la condition de transversalité*

$$\lambda(T) \geq 0, \lambda(T)(y(T) - y_T) = 0$$

Le prix implicite de la contrainte ne diffère de 0 que dans la mesure où la contrainte est saturée.

Plus généralement, ces conditions se généralisent à des contraintes quelconques du type : $g(y(T), T) \geq 0$. Parfois, la variable d'état est contrainte à l'instant initial. En suivant des calculs analogues, les conditions de transversalité sont pour $y(0) \geq y_0$:

$$\lambda(0) \leq 0, \lambda(0)(y(0) - y_0) = 0$$

Le cas du producteur : Le producteur de la ressource non-renouvelable fait face à la contrainte $S(T) \geq 0$. La condition de transversalité est $\lambda(T) \geq 0, \lambda(T)S(T) = 0$. Elle s'interprète donc aisément : soit le gisement est épuisé en T et la ressource est rare, son prix est donc $\lambda(T) > 0$, soit du minerai est laissé en terre et le gisement restant est sans valeur économique, $\lambda(T) = 0$.

Exemple : À l'aide des spécifications retenues dans le paragraphe 2.3.2, le jeu des conditions de transversalité donne

$$\lambda(2) = \lambda_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0 S(2) = 0.$$

Si l'on suppose que $\lambda_0 > 0$ alors forcément $S(2) = 0$ et on retrouve la solution déterminée au paragraphe 2.3.2 où $S(2) = 0$ était imposé a priori. Si l'on calcule la fonction valeur initiale de cette solution on a $V_A(0) = \int_0^2 e^{-rt} \pi(q(t)) dt \simeq 13,42$. Si en revanche, on suppose que $\lambda_0 = 0$ alors la condition d'optimalité implique que $q(t) = 4$ tant que le stock n'est pas épuisé. Dans ce cas en intégrant l'équation de mouvement sur $[0, 2]$ on a

$$S(T) - S = -\int_0^T q(t) dt \Leftrightarrow S(2) - 6 = -8$$

ce qui implique $S(2) < 0$. Ainsi, il existera une date $t_1 < 2$ telle que $S(t_1) = 0$ soit

$$\begin{aligned} 0 - S &= -\int_0^{t_1} q(t) dt \Leftrightarrow 0 - 6 = -4t_1 \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dès lors, on obtient $S(t) = 6 - 4t$ pour $t \in [0, t_1]$ et $S(t) = 0$ pour $t \in]0, 2]$. Si l'on calcule la fonction valeur initiale de cette solution on a $V_B(0) = \int_0^{t_1} e^{-rt} \pi(q(t)) dt = \int_0^{\frac{3}{2}} 12e^{-\frac{t}{2}} 12 dt \approx 12,66$.
Puisque $V_A(0) > V_B(0)$, il est préférable de ne pas laisser de ressource dans le sous-sol et la solution du paragraphe 2.3.2 est donc optimale.

B. L'objectif comprend une fonction terminale

Notons $F(y(T))$ la fonction valorisant la variable d'état $y(T)$ à l'instant final T . On la qualifie de fonction terminale. La fonction objectif devient :

$$\int_0^T f(x(t), y(t), t) dt + F(y(T))$$

Le lagrangien (2.2) se modifie de la façon suivante :

$$L = \int_0^T \{H(t) + \lambda'(t)y(t)\} dt + F(y(T)) - \lambda(T)y(T) + \lambda(0)y(0) \quad (2.6)$$

La condition nécessaire est donc :

$$L'_{y(T)} = F'(y(T)) - \lambda(T) = 0$$

D'où :

Théorème 2.6 (Condition de transversalité 3). *Lorsque la fonction objectif comprend une fonction terminale, aux conditions nécessaires (2.3)-(2.5) s'ajoute la condition de transversalité*

$$\lambda(T) = F'(y(T))$$

Le prix implicite reflète alors la contribution marginale de la variable d'état à la fonction terminale.

Le cas du producteur : Notons $\Pi(s(T))$ la valeur du terrain si le gisement atteint le niveau $s(T)$ à l'instant final. La condition de transversalité devient : $\lambda(T) = \Pi'(s(T))$. Dans ce cas, le prix de la ressource *in situ* en T reflète la valeur marginale résiduelle de la ressource, soit son prix de cession.

Exemple : Conservons les spécifications retenues et supposons que la valeur du terrain soit proportionnelle au stock *in situ* selon la fonction $\Pi(s(T)) = 2s(T)$. Dans ce cas les conditions d'optimalité sont encore celles du paragraphe 2.3.2 et la condition de transversalité est telle que $\lambda(2) = 2$. Ainsi pour tout t , puisque $\lambda(t) = \lambda_0$ alors ici $\lambda_0 = 2$ et donc $q(t) = 4 - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}$. En intégrant l'équation de mouvement sur $[0, 2]$ on obtient

$$S(2) - 6 = -\frac{10}{3} + \frac{4}{3}e \Rightarrow S^*(2) = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}e \approx 0,29$$

Il est donc optimal de laisser 0,29 de stock en terre pour le céder car sa valeur marginale terminale $\Pi'(s(2)) = 2$ est supérieure à la rente que l'on retirerait à produire et qui a été calculée au paragraphe 2.3.2 soit $\lambda_0 \approx 1,74$. À titre d'exercice, on peut vérifier que si $\Pi'(s(T)) \leq 1,74$ alors forcément $S^*(2) = 0$.

C. L'instant final n'est plus donné

L'instant final devient alors une variable de décision qui doit être choisie de façon optimale. En utilisant à nouveau (2.2), la règle de Leibniz (voir annexe B.2) donne la condition nécessaire :

$$\begin{aligned} L'_T &= H(T) + \lambda'(T)y(T) - \lambda'(T)y(T) + \lambda(T)y'(T) = 0 \\ &\Leftrightarrow H(T) + \lambda(T)y'(T) = 0 \end{aligned}$$

Or le produit $\lambda(T)y'(T)$ est obligatoirement nul car si $y(T)$ est donnée, $y'(T) = 0$ et si $y(T)$ est libre, $\lambda(T) = 0$ par le théorème 2.4. On obtient donc :

Théorème 2.7 (Horizon optimal). *Lorsque l'instant final est libre, aux conditions nécessaires (2.3)-(2.5) s'ajoute la condition de transversalité*

$$H(T) = 0$$

La contribution marginale de T est donc telle que le hamiltonien à cette date s'annule. Prolonger le problème au-delà de cet instant entraînerait un hamiltonien négatif, soit une valeur instantanée et future négative pour l'agent économique, ce qui l'éloigne de fait du maximum.

Le cas du producteur : Si le producteur de la ressource non-renouvelable a le choix dans la date de fin d'exploitation du gisement, la condition nécessaire est : $H(T) = e^{-rT} \pi(q(T)) - \lambda(T)q(T) = 0$. Le producteur arrête son extraction lorsque le profit actualisé net du coût implicite dû à l'épuisement du gisement est nul. Par exemple si $\pi(0) = 0$, cela peut impliquer que $q^*(T) = 0$, à savoir qu'à l'arrêt du gisement, l'extraction devient nulle.

Exemple : À l'aide des spécifications retenues et des conditions d'optimalité du paragraphe 2.3.2, la condition de transversalité est

$$\begin{aligned} H(T) &= e^{-\frac{T}{2}} \left(12q(T) - \frac{3}{2}q(T)^2 - 12 \right) - \lambda_0 q(T) = 0 \\ &= 12e^{-\frac{T}{2}} + \frac{1}{6}e^{\frac{T}{2}}\lambda_0^2 + 4\lambda_0 = 0 \end{aligned}$$

Comme $S(T) = 0$, en intégrant l'équation de mouvement sur $[0, T]$, il vient

$$0 - 6 = \left(e^{\frac{T}{2}} - 1 \right) \frac{2}{3} \lambda_0 - 4T$$

ce qui permet de déterminer la rente en fonction de T , soit

$$\lambda_0^* = 3 \frac{3 - 2T}{e^{\frac{T}{2}} - 1}$$

Ainsi la condition de transversalité implique

$$e^{\frac{T}{2}} + 18e^{\frac{T}{2}}g^2(T) + g(T) = 0 \quad \text{ou} \quad g(T) = \frac{3 - 2T}{e^{\frac{T}{2}} - 1}$$

On peut montrer que cette équation en T s'annule en $T^* \approx 1,85$ ce qui correspond à une rente $\lambda_0^* \approx 1,39$. Ainsi il est optimal d'épuiser le gisement avant $t = 2$, ce qui par rapport à l'exemple du paragraphe 2.3.2 produit une réduction dans la rente minière.

Par suite, il est possible de dégager d'autres conditions de transversalité s'il y a des cas concomitants. Par exemple, si l'instant final est libre et que la fonction objectif comprend une fonction terminale dépendant de T , $F(y(T), T)$, la condition de transversalité (condition nécessaire) est, en se reportant à l'écriture la plus générale du lagrangien (2.6) :

$$H(T) + F'_T(y(T), T) = 0$$

2.3.4 Prolongements

En supposant toujours que le temps est continu, deux types de prolongements usuels sont abordés : le cas où l'horizon terminal du problème est infini et celui où existent des contraintes sur les variables de contrôle ou d'états.

A. Horizon infini

Dans les problèmes économiques ou de gestion, notamment l'analyse de la croissance ou de la gestion financière des entreprises, il est assez pratique de supposer que l'horizon terminal est infini. L'intérêt d'une telle approche est de pouvoir envisager des décisions de très long terme pour lesquelles l'idée même de date terminale n'a guère de sens. Ainsi, laisser courir le temps jusqu'à l'infini est une hypothèse assez naturelle, offrant également l'avantage qu'il est alors inutile de spécifier la valeur terminale du problème ou de déterminer l'horizon optimal. Toutefois, son principal inconvénient est que des difficultés d'ordre technique peuvent apparaître. Le problème noté P_{D_∞} , s'écrit

$$\begin{aligned} \max_{x(t)} \int_0^\infty f(x(t), y(t), t) dt \\ s/c \quad y'(t) = g(x(t), y(t), t) \\ y(0) = y_0 \end{aligned}$$

Ce problème doit être complété par une condition terminale sur la limite de la variable d'état en l'infini. À l'instar du cas où T était fini, on peut identifier trois situations, avec \bar{y} un nombre réel :

$$(1) : \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \text{ libre}$$

$$(2) : \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$$

$$(3) : \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \bar{y}$$

La question principale qui se pose est de savoir dans quelle mesure le Principe du maximum et les conditions de transversalité continuent à s'appliquer en faisant tendre T vers l'infini. La réponse n'est malheureusement pas triviale. Si le théorème 2.2 continue de s'appliquer (en posant $T \rightarrow \infty$), en revanche, les conditions de transversalité que l'on pourrait dériver par analogie⁴ ne sont nécessaires que pour des configurations

4 Selon les conditions terminales, on aurait pour (1) : $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$ et pour (3) : $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \geq 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)(y(t) - \bar{y}) = 0$.

très restrictives des fonctions f et g . Il est alors préférable de vérifier des conditions *suffisantes* de transversalité.

Théorème 2.8 (Condition de transversalité 4). *Lorsque l'horizon est infini, si $(x(t), y(t), \lambda(t))$ vérifie le théorème 2.2 et la condition terminale (1), (2) ou bien (3) alors la solution est optimale si le hamiltonien est concave et si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) (\hat{y}(t) - y(t)) \geq 0 \quad (2.7)$$

où $\hat{y}(t)$ est toute trajectoire admissible de la variable d'état (c'est-à-dire qui satisfait $\hat{y}'(t) = g(x(t), \hat{y}(t), t)$), pour laquelle la condition terminale (1), (2) ou bien (3) est vérifiée.

Ainsi, $\hat{y}(t)$ correspond, sur l'infini, à un état plafonnant l'état optimal lorsqu'accroître cet état est coûteux ($\lambda(t) > 0$) et à un plancher lorsque diminuer le niveau de l'état est coûteux ($\lambda(t) < 0$). Cette formulation de la condition de transversalité est très générale car il est nécessaire de comparer la trajectoire optimale avec toutes les autres trajectoires possibles. Cependant, il existe des configurations plus simples d'utilisation dans laquelle elle est directement vérifiée :

- si (1) ou (3) s'applique alors (2.7) peut être remplacée par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) y(t) = 0 \quad \text{et} \quad |\hat{y}(t)| < Y \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \geq 0 & \hat{y}(t) \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \leq 0 & \hat{y}(t) \leq 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \hat{y}(t) \geq 0$$

pour un certain réel Y .

- si (2) s'applique alors (2.7) peut être remplacée par

$$|\lambda(t)| < \Lambda \text{ donné}$$

pour un certain réel Λ .

Une famille de problèmes à horizon infini est souvent abordée dans les situations économiques, ce sont les problèmes autonomes. Dans ce cas, la fonction de gain instantané f est définie en valeur actualisée au taux $r > 0$, soit $f(x(t), y(t), t) = e^{-rt} \phi(x(t), y(t))$ et la fonction de mouvement g ne dépend pas explicitement du temps t , soit $g(x(t), y(t), t) = g(x(t), y(t))$. Un dernier théorème peut être avancé.

Théorème 2.9 (Problème Autonome). *Dans un problème autonome avec horizon infini*

1. *la fonction valeur du problème $V(y(t), t)$ vérifie*

$$V(y(t), t) = e^{-rt} V(y(t), 0)$$

2. *le hamiltonien $H(t)$ vérifie la condition (nécessaire) de transversalité*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$$

La première condition a une interprétation très claire : sur un temps infini la valeur du problème à une certaine date est simplement la valeur actualisée du problème initial pour le niveau d'état courant. En effet, soit en une date t , la donnée $y(t) = \theta$ alors la fonction valeur en t est

$$\begin{aligned} V(\theta, t) &= \max_{x(\tau)} \int_t^\infty e^{-r\tau} \phi(x(\tau), y(\tau)) d\tau \\ &= e^{-rt} \max_{x(\tau)} \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)} \phi(x(\tau), y(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

En posant $z = \tau - t$ alors

$$V(\theta, t) = e^{-rt} \max_{x(z)} \int_0^\infty e^{-rz} \phi(x(z), y(z)) dz$$

car $dz = d\tau$ et le changement de variable est neutre sur l'infini. Il reste alors à identifier

$$\max_{x(z)} \int_0^\infty e^{-rz} \phi(x(z), y(z)) dz$$

à $V(\theta, 0)$ et à se rappeler que $\theta = y(t)$ pour avoir $V(y(t), t) = e^{-rt} V(y(t), 0)$.

La seconde condition est en fait une condition nécessaire de transversalité qui stipule que sur l'infini, les perspectives en termes d'objectif vont forcément s'annuler puisque l'horizon est alors variable. Toutefois cette seconde condition est souvent redondante lorsque (2.7) est aussi vérifiée.

Remarque : Une autre difficulté inhérente au problème P_{D_∞} concerne la convergence du critère intégral. En effet, si f n'est pas une fonction bornée alors il se peut que $\int_0^\infty f(x(t), y(t), t) dt$ tende aussi vers l'infini, ce qui ne permet pas de détecter un maximum. Pour solutionner ce problème, plusieurs alternatives sont possibles notamment définir des critères d'optimisation autres que la maximisation (dépassement, rattrapage etc.). Toutefois, dans les problèmes autonomes, la convergence est assurée si ϕ est bornée.

Le cas du producteur : Que se passe-t-il si le producteur de ressource non-renouvelable planifie l'extraction sur l'infini. Le problème est autonome et s'écrit:

$$\begin{aligned} &\max_{q(t)} \int_0^\infty e^{-rt} \pi(q(t)) dt \\ &s/c \quad s'(t) = -q(t) \\ &s(0) = S, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Par rapport au cas en horizon fini donné, les conditions nécessaires du Principe du maximum sont inchangées. Les conditions de transversalité deviennent :

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) s(t) = 0 ; \hat{s}(t) \in [0, S] \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \geq 0 \\ &\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-rt} \pi(q(t)) - q(t) \lambda(t)] = 0 \end{aligned}$$

Etant données les conditions d'optimalité, on a donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda_0 \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} [\pi(q(t)) - \pi'(q(t))q(t)] = 0$$

Si on suppose que $\lambda_0 = 0$ alors $q(t) = q_0$ tel que $\pi'(q_0) = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} \pi(q_0) = 0$ est bien vérifiée. En revanche, $s'(t) = -q_0$ implique que $s(t) = S - tq_0$ et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = -\infty < 0$ ce qui est contradictoire avec la condition de transversalité. Ainsi nécessairement $\lambda_0 > 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_0 s(t) = 0$ implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$. Le gisement est donc épuisé sur l'infini.

Exemple : À l'aide des spécifications retenues, le jeu des conditions nécessaires et de transversalité décrit dans le cas du producteur ci-dessus donnent

$$q(t) = 4 - \frac{\lambda_0}{3} e^{\frac{t}{2}} \quad \text{si } t \leq t_0 = 2 \ln \left(\frac{12}{\lambda_0} \right)$$

$$q(t) = 0 \quad \text{si } t > t_0$$

où λ_0 est tel que

$$\int_0^{2 \ln \left(\frac{12}{\lambda_0} \right)} \left(4 - \frac{\lambda_0}{3} e^{\frac{t}{2}} \right) dt + \int_{2 \ln \left(\frac{12}{\lambda_0} \right)}^{\infty} 0 dt = 6$$

soit $\lambda_0 \approx 2,587$. De plus, sur l'infini on vérifie bien (car pour $t > t_0 \approx 3,068$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)s(t) = 0; \hat{s}(t) \in [0, 6] \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda_0 \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-\frac{t}{2}} 12 = 0$$

B. La gestion des contraintes dynamiques

Dans le cadre des problèmes d'optimisation statique, on a vu comment gérer des contraintes sous forme d'inégalité ou d'égalité. Pour les problèmes d'optimisation dynamique, il est courant qu'à chaque date les variables de contrôle ou d'état soient soumises à des contraintes. Par exemple, l'état tel qu'un stock ne peut pas être négatif ou bien le contrôle constitué par le niveau des ventes ne peut pas dépasser le stock courant. Selon que ces contraintes jouent sur les variables de contrôle ou d'état ou encore sur les deux, le Principe du maximum doit être augmenté de conditions nécessaires supplémentaires.

Contraintes sur le contrôle. À l'instar des contraintes statiques, une contrainte sur le contrôle seulement s'écrit de la manière suivante pour chaque $t \in [0, T]$:

$$\gamma(x(t), t) \leq \xi$$

Ainsi le problème de contrôle devient PD_3

$$\max_{x(t)} \int_0^T f(x(t), y(t), t) dt$$

$$s/c \quad y'(t) = g(x(t), y(t), t)$$

$$\gamma(x(t), t) \leq \xi$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y(T) = y_T$$

Les conditions nécessaires d'optimalité associées à ce problème exigent une légère modification du théorème 2.2 que l'on peut regrouper dans le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 (Contraintes sur le contrôle). *Si la contrainte est régulière en t , les conditions nécessaires associées à PD_3 sont $\forall t$:*

$$\mathcal{L}'_{x(t)}(t) = 0 \quad (2.8)$$

$$\mu(t)\mathcal{L}'_{\mu(t)}(t) = 0 \text{ et } \mathcal{L}'_{\mu(t)}(t) \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\lambda'(t) = -H'_{y(t)}(t) \quad (2.10)$$

$$y'(t) = H'_{\lambda(t)}(t)$$

où $\mathcal{L}(t) = H(t) + \mu(t)(\xi - \gamma(x(t), t))$ est le lagrangien généralisé du problème et $\mu(t)$ est le multiplicateur de Kuhn et Tucker associé à la contrainte.

La différence entre le théorème 2.2 et ce corollaire 2.1 est que maintenant la gestion de la contrainte implique de résoudre à chaque date t un problème d'optimisation statique paramétré en t , soit $\max_{x(t)} H(t)$ sous la contrainte $\xi - \gamma(x(t), t) \geq 0$. C'est bien cela qui conduit à considérer un lagrangien \mathcal{L} à chaque date t et à écrire les conditions nécessaires données en (2.8) et (2.9). Comme en optimisation statique, la régularité de la contrainte (voir le paragraphe 1.4.2) permet d'assurer l'existence du multiplicateur $\mu(t)$.

Le cas du producteur : Supposons maintenant que la production soit contrainte par une capacité maximale \bar{q} . Ainsi le problème devient

$$\begin{aligned} \max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} \pi(q(t)) dt \\ \text{s/c } s'(t) &= -q(t) \\ \bar{q} - q(t) &\geq 0 \\ s(0) &= S, s(T) = 0 \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.1, en posant le lagrangien $\mathcal{L}(t) = e^{-rt} \pi(q(t)) - \lambda(t)q(t) + \mu(t)(\bar{q} - q(t))$, les conditions nécessaires sont

$$\begin{aligned} e^{-rt} \pi'(q(t)) - (\lambda(t) + \mu(t)) &= 0 \\ \mu(t)(\bar{q} - q(t)) &= 0 \text{ et } \bar{q} - q(t) \geq 0 \\ s'(t) &= -q(t) \\ \lambda'(t) = 0 &\Rightarrow \lambda(t) = \lambda_0 \end{aligned}$$

La contrainte est régulière car linéaire. Deux régimes de solution peuvent apparaître à chaque date selon que la capacité \bar{q} est plus ou moins importante. En effet, si en t donné $\bar{q} > q(t)$ alors $\mu(t) = 0$ et on retrouve la solution non contrainte déjà étudiée, soit $q^L(t)$ telle que $\pi'(q^L(t)) = e^{rt} \lambda_0$, soit encore $q^L(t) = (\pi')^{-1}(e^{rt} \lambda_0)$. Si $q^L(t) \geq \bar{q}$ alors la solution est contrainte, $q(t) = \bar{q}$, et donc le multiplicateur $\mu(t)$ est tel que $\mu(t) = e^{-rt} \pi'(\bar{q}) - \lambda_0 \geq 0$. De manière générale, on note que $q^{L'}(t) = \frac{re^{rt} \lambda_0}{\pi''(q^L(t))} < 0$, autrement dit $q^L(t)$ est décroissante avec le temps. On en déduit qu'il va donc exister une date t^* avant laquelle la production est contrainte et au delà de laquelle la production passe en dessous de la capacité soit $t^* = \frac{1}{r} \ln(\pi'(\bar{q})/\lambda_0)$. Ainsi en fonction de la rareté du minerai (via λ_0) et du niveau maximal de production (via \bar{q}), la solution pourra être contrainte dès la date $t = 0$ si $\bar{q} \leq (\pi')^{-1}(\lambda_0)$ et même tout au long de la trajectoire d'extraction si $\bar{q} \leq (\pi')^{-1}(e^{rT} \lambda_0)$.

Exemple : Cherchons la solution avec les spécifications précédentes et en supposant que $\bar{q} = 3,2$ on a $q^L(t) = 4 - \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\lambda_0$ et $t^* = 2\ln(16/(5\lambda_0))$. Si la production n'est jamais contrainte, on a vu que $\lambda_0 \approx 1,74$ et donc $q^L(0) = 4 - \frac{e}{e-1} \approx 3,41$ ce qui viole la contrainte. Il faut donc trouver la rente de rareté λ_0 telle que

$$S = \int_0^{t^*} \bar{q} dt + \int_{t^*}^T q^L(t) dt \Leftrightarrow \frac{18}{5} - \frac{16}{5} \ln(2) + \frac{8}{5} \ln\left(\frac{5}{3}\lambda_0\right) - \frac{2e}{3}\lambda_0 = 0$$

On peut vérifier que cette équation est vraie pour $\lambda_0 \approx 1,662$. Dans ce cas, $t^* \approx 0,73$ et donc la production est contrainte à $q^*(t) = 3,2$ pour $t \in [0; 0,73]$ puis est libre et vaut $q^L(t) = 4 - \frac{1,662}{3}e^{\frac{t}{2}}$ pour $t \in [0,73; 2]$.

Contraintes mixtes. Lorsque la contrainte met en jeu à la fois la variable de contrôle et le variable d'état, on la qualifie de mixte. Pour chaque $t \in [0, T]$, elle se note

$$\gamma(x(t), y(t), t) \leq \xi$$

Dès lors, le problème de contrôle PD_4 s'écrit

$$\begin{aligned} & \max_{x(t)} \int_0^T f(x(t), y(t), t) dt \\ & s/c \quad y'(t) = g(x(t), y(t), t) \\ & \gamma(x(t), y(t), t) \leq \xi \\ & y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y(T) = y_T \end{aligned}$$

En notant $\mathcal{L}(t) = H(t) + \mu(t)(\xi - \gamma(x(t), y(t), t))$, on peut avancer le corollaire suivant qui constitue une extension naturelle du précédent.

Corollaire 2.2. (Contraintes mixtes). *Les conditions nécessaires associées au problème PD_4 sont celles du corollaire 2.1 à la seule différence que (2.10) devient*

$$\lambda'(t) = -\mathcal{L}'_{y(t)}(t) \quad (2.11)$$

Remarque : Cette adaptation du Principe du maximum n'est toutefois valide que si la condition de régularité des contraintes est bien vérifiée en t . Dans le cas contraire, il se peut que la variable adjointe $\lambda(t)$ admette une discontinuité locale et le Principe du maximum doit être redéfini pour cette valeur de t . Cette situation est susceptible de se produire notamment si $\gamma'_x(x(t), y(t), t) = 0$.

Le cas du producteur : Supposons désormais que la production soit contrainte par une capacité qui dépend du niveau du gisement soit $q(t) \leq \alpha s(t)$ où $\alpha \in]0, 1[$. Le problème devient

$$\begin{aligned} & \max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} \pi(q(t)) dt \\ & s/c \quad s'(t) = -q(t) \\ & \alpha s(t) - q(t) \geq 0 \\ & s(0) = S, \quad s(T) = 0 \end{aligned}$$

Le lagrangien étant $\mathcal{L}(t) = e^{-rt} \pi(q(t)) - \lambda(t)q(t) + \mu(t)(\alpha s(t) - q(t))$, les conditions nécessaires sont

$$\begin{aligned} e^{-rt} \pi'(q(t)) - (\lambda(t) + \mu(t)) &= 0 \\ \mu(t)(\alpha s(t) - q(t)) &= 0 \text{ et } \alpha s(t) - q(t) \geq 0 \\ \lambda'(t) &= -\alpha \mu(t) \\ s'(t) &= -q(t) \end{aligned}$$

Tout d'abord, on note que si la contrainte est saturée, elle est régulière en raison de sa linéarité avec $q(t)$. Ensuite, comme $\lambda'(t) = -\alpha \mu(t)$, on déduit que si la contrainte est libre alors $\mu(t) = 0$ et donc la variable adjointe est constante mais son niveau est plus important par rapport au cas sans contrainte. Ce n'est pas forcément le cas si la contrainte est saturée. Dans ce dernier cas, la variable adjointe est décroissante avec le temps, ce qui signifie que la rente minière décroît au cours de la période de production : la saturation de la contrainte réduit la rentabilité du stock restant en terre.

Dans le cas libre, $\lambda(t) = l$ où l est une inconnue qui n'est plus forcément égale à λ_0 , on retrouve une solution libre assez semblable à $q^L(t)$ soit $q^L(t) = (\pi')^{-1}(e^{rt}l)$. Si la contrainte est saturée, celle-ci permet de définir un nouveau régime de la solution car, dans ce cas, $q^s(t) = \alpha s(t)$ et donc $s'(t) = -\alpha s(t)$. La recherche de la solution revient à résoudre cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 en $s(t)$. On obtient $s(t) = Ae^{-\alpha t}$ où A est une constante non négative qui dépend des conditions initiales.

Exemple : Conservons les spécifications déjà utilisées et supposons $\alpha = \frac{3}{4}$. Si la contrainte est libre alors $q^L(t) = 4 - e^{\frac{t}{2}} \frac{l}{3}$ et $\mu(t) = 0$ donc $\lambda(t) = l$. Si la contrainte est saturée alors $q^s(t) = \frac{A}{2} e^{-\frac{3t}{4}}$ et

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{-\frac{t}{2}} \left(12 - \frac{9}{4} A e^{-\frac{3t}{4}} \right) - \lambda(t) \geq 0 \\ \lambda'(t) &= \frac{3}{4} \lambda(t) - \frac{3}{4} e^{-\frac{t}{2}} \left(9 - \frac{27}{16} A e^{-\frac{3t}{4}} \right) \end{aligned}$$

Cette dernière équation est une équation différentielle (voir annexe C.2) dont la solution est

$$\lambda(t) = e^{\frac{3t}{4}} \left(\frac{36}{5} e^{-\frac{5t}{4}} - \frac{27}{32} A e^{-t^2} + B \right)$$

où B est une constante inconnue. En déterminant les inconnues A, B, l et t^* , la solution du problème est

$$q(t) = \begin{cases} q^s(t) = \frac{9}{2} e^{-\frac{3t}{4}} ; t \in [0, t^*] \\ q^L(t) = 4 - e^{\frac{t}{2}} \frac{l}{3} ; t \in [t^*, 2] \end{cases}$$

où $l = 1,96$ et $t^* = 0,465$ de manière à ce que

$$\mu(t^*) = 0 \text{ et } \int_0^{t^*} q^s(t) dt + \int_{t^*}^2 q^L(t) dt = 6$$

La contrainte sur la production accroît la rente minière.

Contraintes pures. Certaines contraintes portent uniquement sur la variable d'état, on les qualifie alors de pures. À chaque instant $t \in [0, T]$, elles s'écrivent

$$\gamma(y(t), t) \leq \xi$$

Le problème à résoudre s'écrit PD_5

$$\begin{aligned} & \max_{x(t)} \int_0^T f(x(t), y(t), t) dt \\ & s/c \quad y'(t) = g(x(t), y(t), t) \\ & \quad \gamma(y(t), t) \leq \xi \\ & \quad y(0) = y_0 \text{ et } y(T) = y_T \end{aligned}$$

Contrairement aux cas précédents, lorsqu'elles seaturent, les contraintes pures ne peuvent par définition jamais remplir la condition de régularité car $\gamma'_{x(t)}(y(t), t)$ est toujours nul. Etant donné qu'aucun contrôle ne joue sur la contrainte, il se peut que la trajectoire de la variable d'état vienne « percuter » cette contrainte. Il s'ensuit que la variable adjointe $\lambda(t)$ n'est pas forcément définie de manière unique en t . Sa trajectoire peut donc admettre des sauts de discontinuité. Le Principe du maximum doit alors être redéfini pour les instants t où la contrainte passe de l'état libre à l'état saturé (ou inversement). Enfin, les dates initiale et terminale sont aussi considérées comme des points de saturation potentiels.

Notons $\mathcal{L}(t) = H(t) + \mu(t)(\xi - \gamma(y(t), t))$ le lagrangien du problème où $\mu(t) \geq 0$ est le multiplicateur associé à la contrainte pure.

Corollaire 2.3. (Contraintes pures). *Les conditions nécessaires associées au problème contraint PD_5 sont*

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}'_{x(t)}(t) = 0 \\ & \mu(t)\mathcal{L}'_{\mu(t)}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}'_{\mu(t)}(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Sauf aux éventuels points de saturation de la contrainte pure $\{t_j\}_{j=1\dots J}$ si $\lambda'(t)$ existe alors

$$\lambda'(t) = -\mathcal{L}'_{y(t)}(t)$$

Aux éventuels points de saturation de la contrainte $\{t_j\}_{j=1\dots J}$, les sauts de discontinuité de la variable adjointe λ sont donnés par

$$\lambda(t_j^+) - \lambda(t_j^-) = -\delta(t_j) \gamma'_{y(t)}(y(t_j), t_j)$$

où les coefficients $\delta(t_j)$ obéissent à

$$\delta(t_j) \geq 0 \quad \text{et} \quad \delta(t_j)\gamma(y(t_j), t_j) = 0$$

et $\delta(t_j) = 0$ si $\gamma(y(t_j), t_j) = \xi$ alors que $-\gamma'_{y(t)}(y(t), t)g(x(t), y(t), t)$ est discontinu en $t = t_j$.

Les dernières conditions permettent de prendre en compte explicitement le fait que la variable adjointe peut faire des sauts, et donc être discontinue aux points de saturation des contraintes pures.

Remarque : Cette adaptation du Principe du maximum n'est pas la seule qui permette de traiter les contraintes pures. En outre elle n'est pas forcément infaillible dans la recherche de la solution en ce sens qu'elle n'est pas la plus générale.

Le cas du producteur : Supposons maintenant que le stock ne puisse pas descendre au-dessous d'un certain seuil minimal $z > 0$ (et $S > z$) sinon la production devient techniquement impossible. Ainsi le problème devient

$$\begin{aligned} \max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} \pi(q(t)) dt \\ s/c \quad s'(t) = -q(t) \\ s(0) = S, \quad s(t) \geq z \end{aligned}$$

en notant que la condition terminale est forcément écrite sous la forme d'une contrainte, $s(T) \geq z$. On pose le lagrangien $\mathcal{L}(t) = e^{-rt} \pi(q(t)) - \lambda(t)q(t) + \mu(t)(s(t) - z)$, et les conditions nécessaires sont

$$\begin{aligned} e^{-rt} \pi'(q(t)) - (\lambda(t) + \mu(t)) &= 0 \\ \mu(t)(s(t) - z) &= 0 \quad \text{et} \quad s(t) - z \geq 0 \\ s'(t) &= -q(t) \\ \lambda'(t) &= -\mu(t) \end{aligned}$$

Aux éventuels points de saturation de la contrainte $\{t_j\}_{j=1 \dots J}$,

$$\lambda(t_j^-) - \lambda(t_j^+) = \delta(t_j) \geq 0 \quad \text{avec} \quad \delta(t_j)(s(t_j) - z) = 0$$

et $\delta(t_j) = 0$ si $s(t_j) = z$ alors que $q(t)$ est discontinu en $t = t_j$.

Pour utiliser cette batterie de conditions, on peut s'apercevoir qu'en date $t = 0$ la contrainte est forcément libre car $s(0) = S > z$ et donc initialement on retrouve la solution libre déjà étudiée pour t dans un voisinage de 0 car alors $\mu(t) = 0$, et donc $\lambda(t) = l$, soit la solution $q^L(t) = (\pi')^{-1}(e^{rt}l)$. On anticipe donc que pour un certain intervalle $t \in [0, t^*]$ la contrainte restera libre.

Si elle se sature en dehors de cet intervalle alors forcément la production est nulle car

$$s(t) = z \Rightarrow s'(t) = 0 = -q(t)$$

Il est donc dans l'intérêt du producteur de saturer cette contrainte en date terminale mais pas avant car aucune production, et donc aucun profit, n'est réalisable. Ainsi, un point de saturation potentiel apparaît en $t_1 = T$ et implique que

$$\lambda(T^-) - \lambda(T) = \delta(T) \geq 0 \Leftrightarrow l - \lambda(T) = \delta(T) \geq 0$$

car avant ce point de saturation $\lambda(t) = l$ qui est la solution de $S - z = \int_0^T q^L(t) dt$.

Exemple : Avec $z = 2$ et les spécifications retenues, la solution lorsque la contrainte est libre est $q^L(t) = 4 - e^{\frac{t}{3}}$ et $\mu(t) = 0$. Donc $\lambda(t) = l$ de sorte que

$$S - z = \int_0^T q^L(t) dt \Rightarrow l = \frac{6}{e-1} \approx 3,49$$

On constate alors que la trajectoire de la production est discontinue en $t = T$. En effet, $q^L(T^-) = 4 - \frac{2e}{e-1} \approx 0,386$ et $q(T) = 0$. Ainsi, puisque $s(T) = z = 2$, la variable adjointe n'admet pas de saut de discontinuité donc $\delta(T) = 0$, $\lambda(T) = l$ et $\mu(T) = e^{-1}12 - l = 0,924 > 0$. La présence de cette contrainte technique accélère donc la production. La rente minière est plus forte car elle incorpore dans sa trajectoire le prix implicite (terminal) de saturation de la contrainte.

2.3.5 Conditions suffisantes

Etant donnée la diversité des cas qu'il est possible de rencontrer dans l'optimisation dynamique, on présente les conditions suffisantes pour le problème suffisamment général suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{x(t)} \int_0^T f(x(t), y(t), t) dt + F(y(T)) \\ & \text{s/c } y'(t) = g(x(t), y(t), t), y(0) = y_0, y(T) \text{ libre, } T \text{ donné} \end{aligned}$$

Conformément aux théorèmes précédents, les conditions nécessaires et de transversalité sont :

$$CN^* : \begin{cases} H'_{x(t)}(t) = 0 \\ y'(t) = H'_{\lambda(t)}(t) \\ \lambda'(t) = -H'_{y(t)}(t) \\ \lambda(T) = F'_{y(t)}(y(T)) \end{cases}$$

Le théorème décrivant les conditions suffisantes (voir annexe D.3) est :

Théorème 2.10 (Suffisance du Principe du maximum). *Les conditions nécessaires CN^* sont suffisantes si $H(t)$ est concave en $(x(t), y(t))$ et $F(y(T))$ est concave en $y(T)$.*

La stricte concavité des fonctions H et F assurent l'unicité de la solution.

Lorsque qu'il n'y a pas de fonction terminale F , une condition suffisante moins exigeante est donnée (mais non démontrée) dans le théorème qui suit :

Théorème 2.11 (Concavité du Hamiltonien Maximum). *Soit le hamiltonien maximum $H^*(y, \lambda, t) \equiv \max_x H(x, y, \lambda, t)$ et soient $(x^*(t), y^*(t))$ qui vérifient les conditions nécessaires CN^* . Si $H^*(y, \lambda, t)$ est concave en y , $\forall t$ alors la paire $(x^*(t), y^*(t))$ est la solution du problème.*

Enfin, exposons les conditions suffisantes pour les prolongements effectués. Par extension à l'horizon infini (toujours à l'exception de la fonction terminale F), la concavité du hamiltonien est également suffisante. Pour les contraintes dynamiques, la combinaison du théorème précédent et des développements effectués dans l'optimisation statique contrainte permettent de démontrer que la concavité du hamiltonien et la quasi-concavité de $\xi - \gamma$ suffisent à rendre suffisantes les conditions nécessaires.

2.4 PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Une approche plus globale de l'optimisation dynamique est celle de la programmation dynamique. Cette approche repose sur le Principe d'optimalité de Bellman. Celui-ci sti-

pule qu'une décision optimale obéit à la propriété suivante : quelles que soient les décisions prises au cours des périodes précédentes et quel que soit l'état initial, la séquence des décisions restant à effectuer doit constituer une trajectoire optimale vis-à-vis du sous-problème démarrant à la période courante étant donné le niveau courant de l'état résultant des décisions précédentes.

Avec les notations que l'on a utilisées jusqu'à présent, ce principe se traduit plus formellement en disant qu'une séquence de contrôle est optimale si à toute date t , les décisions restantes $x^*(t), x^*(t+1), \dots, x^*(T)$ doivent être optimales étant donné le niveau de l'état courant $y^*(t)$ qui, lui, découle de l'état initial y_0 et des décisions antérieures $x^*(0), \dots, x^*(t-1)$.

Bien que tautologique, ce principe recèle une méthode efficace de résolution itérative utilisant le découpage d'un problème initial en une famille de sous-problèmes démarrant à une date donnée.

Comme précédemment, étudions le temps discret puis le temps continu. Les interprétations des résultats seront menées par comparaison avec le Principe du maximum dans un paragraphe spécifique.

2.4.1 Solution en temps discret

A. Horizon fini

Reprenons le problème en temps discret P_{D_1} :

$$\begin{aligned} \max_{x(t)} \sum_{t=1}^T f(x(t), y(t), t) \\ \text{s/c } y(t+1) &= y(t) + g(x(t), y(t), t) \\ y(1) &= y_1, \quad y(T+1) = y_{T+1} \end{aligned}$$

Puis considérons le sous-problème démarrant en t avec l'état $y(t)$ donné. La fonction valeur du problème se définit alors comme :

$$\begin{aligned} V(y(t), t) &= \max_{x(\tau)} \sum_{\tau=t}^T f(x(\tau), y(\tau), \tau) \\ \text{s/c } y(\tau+1) &= y(\tau) + g(x(\tau), y(\tau), \tau) \\ y(t) &= y_t, \quad y(T+1) = y_{T+1} \text{ donnés} \end{aligned}$$

La première ligne se réécrit :

$$\begin{aligned} V(y(t), t) &= \max_{x(\tau)} \sum_{\tau=t}^T f(x(\tau), y(\tau), \tau) \\ &= \max_{x(t)} \left(f(x(t), y(t), t) + \max_{x(\tau)} \sum_{\tau=t+1}^T f(x(\tau), y(\tau), \tau) \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Or le deuxième terme de la parenthèse de (2.12) correspond à la définition de la fonction valeur en $t + 1$, on a :

$$V(y(t), t) = \max_{x(t)} (f(x(t), y(t), t) + V(y(t + 1), t + 1))$$

Ce qui, en insérant la contrainte devient :

$$V(y(t), t) = \max_{x(t)} (f(x(t), y(t), t) + V(y(t) + g(x(t), y(t), t), t + 1))$$

Autrement dit, la fonction valeur à la date t peut s'appréhender comme le maximum du gain courant, $f(x(t), y(t), t)$, et de la fonction valeur démarrant à la date $t + 1$, sachant que l'état est guidé par $y(t + 1) = y(t) + g(x(t), y(t), t)$. Cette équation est dite équation récurrente de Bellman.

Théorème 2.12 (Équation récurrente de Bellman). *Le couple $\{x^*(t), y^*(t)\}$ pour $t \in \{1, T\}$ est la solution optimale du problème PD_1 si la condition nécessaire suivante est vérifiée pour tout t :*

$$V(y^*(t), t) = \max_{x(t)} (f(x(t), y^*(t), t) + V(y^*(t) + g(x(t), y^*(t), t), t + 1)) \quad (2.13)$$

Résolution. L'équation (2.13) est une équation récurrente dont l'inconnue est la fonction valeur $V(y(t), t)$. La solution se trouve en deux temps : par application du théorème 1.3 vu dans la section 1.3 de l'optimisation statique au membre de droite de (2.13), puis par la procédure de récurrence vers l'amont ou l'induction rétrograde à partir de la date finale T . Toutefois, on n'étudie pas de manière formelle la méthode de résolution de ce type d'équations, notamment les conditions de convergence de l'algorithme d'induction rétrograde.

Le cas du producteur : En temps discret, le problème, donné au paragraphe 2.2.1, s'écrit

$$\begin{aligned} & \max_{q(t)} \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \pi(q(t)) \\ & s/c \quad s(t+1) = s(t) - q(t) \\ & s(1) = S, \quad s(T+1) = 0 \end{aligned}$$

La fonction valeur est donc

$$\begin{aligned} V(s(t), t) &= \max_{q(\tau)} \sum_{\tau=t}^T \beta^{\tau-1} \pi(q(\tau)) \\ & s/c \quad s(\tau+1) = s(\tau) - q(\tau) \\ & s(t) = s_t, \quad s(T+1) = 0 \text{ donnés} \end{aligned}$$

L'équation récurrente de Bellman suivante doit être vérifiée pour tout t

$$V(s(t), t) = \max_{q(t)} (\beta^{t-1} \pi(q(t)) + V(s(t) - q(t), t + 1))$$

Si $V(s(t), t)$ est dérivable alors la production optimale doit obéir à la condition nécessaire suivante

$$\beta^{t-1} \pi'(q(t)) = V'_{s(t)}(s(t) - q(t), t + 1)$$

On trouve une condition d'arbitrage très proche de celle développée dans le cadre du contrôle optimal : la quantité de chaque période $q(t)$ doit être telle que le profit marginal actualisé $\beta^{t-1} \pi'(q(t))$ retiré de l'extraction $q(t)$ est égal à la valeur marginale de l'unité marginale de ressource $V'_{s(t)}(s(t) - q(t), t + 1)$ sacrifiée pour la période suivante. À ce stade et sans plus de spécifications, la programmation dynamique ne permet pas de donner une structure à la production optimale.

Exemple : Avec les spécifications retenues précédemment, l'application du Principe d'optimalité au problème de l'exploitation du minerai se fait en définissant la fonction valeur, en toute date $t = 1, 2$, soit

$$V(s(t), t) = \max_{q(\tau)} \sum_{\tau=t}^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\tau-t} \left[12q(\tau) - \frac{3}{2}q(\tau)^2 - 12 \right]; \quad s(\tau+1) = s(\tau) - q(\tau), \quad s(t) \text{ donné}$$

Ici la valeur terminale du stock est donnée : $s(3) = 0$. Le principe d'optimalité implique la définition de l'équation récurrente suivante : $\forall t = 1, 2$

$$V(s(t), t) = \max_{q(t)} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{t-1} \left[12q(t) - \frac{3}{2}q(t)^2 - 12 \right] + V(s(t+1), t+1) \right) \quad (2.14)$$

Pour résoudre partons de l'horizon, $t = T = 2$ et appliquons (2.14) ce qui revient à écrire

$$V(s(2), 2) = \max_{q(2)} \left(\frac{1}{2} \left[12q(2) - \frac{3}{2}q(2)^2 - 12 \right] + V(s(3), 3) \right) \text{ s/c } s(3) = 0 = s(2) - q(2)$$

Par définition, dans ce problème on a $V(s(3), 3) = 0$ et $s(3) = 0$. Il s'ensuit que $q(2) = s(2)$. Ainsi, en ayant déterminé le contrôle, il est possible d'évaluer $V(s(2), 2)$ soit

$$V(s(2), 2) = \frac{1}{2} \left[12s(2) - \frac{3}{2}s(2)^2 - 12 \right]$$

En remontant vers le temps initial, on passe au problème en date $t = 1$. Pour résoudre appliquons encore (2.14) soit

$$V(s(1), 1) = \max_{q(1)} \left(\left[12q(1) - \frac{3}{2}q(1)^2 - 12 \right] + V(s(2), 2) \right) \text{ s/c } s(2) = s(1) - q(1)$$

Comme $V(s(2), 2)$ vient d'être déterminée et que $s(1) = 6$ par énoncé du problème, on peut écrire que

$$V(s(1), 1) = \max_{q(1)} \left(\left[12q(1) - \frac{3}{2}q(1)^2 - 12 \right] + \frac{1}{2} \left[12(6 - q(1)) - \frac{3}{2}(6 - q(1))^2 - 12 \right] \right)$$

La valeur optimale du contrôle en date $t = 1$ se détermine en résolvant le problème (libre) défini dans le membre de droite de l'équation précédente. La condition nécessaire donne

$$12 - 3q(1) - 6 + \frac{3}{2}(6 - q(1)) = 0 \Rightarrow q^*(1) = \frac{10}{3}$$

Connaissant la production de première période, celle de seconde période vaut

$$q^*(2) = 6 - q^*(1) = \frac{8}{3}$$

On observe que l'on retrouve la solution déterminée avec le contrôle optimal.

B. Horizon infini, problème autonome

Le problème autonome avec horizon infini PD_∞^d se note :

$$\begin{aligned} & \max_{x(t)} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} f(x(t), y(t)) \\ & \text{s/c } y(t+1) = y(t) + g(x(t), y(t)) \\ & y(1) = y_1 \end{aligned}$$

Dans ce cas, la difficulté réside dans l'impossibilité d'appliquer le Principe d'optimalité en utilisant la procédure de récurrence vers l'amont car l'horizon infini ne permet plus d'« initialiser » l'algorithme. Toutefois, pour les problèmes autonomes, il est possible de donner une approche récursive qui permet de mener à bien la recherche de la solution.

Comme le cas autonome implique une fonction valeur indépendante du temps (théorème 2.9, paragraphe 2.3.4), on peut écrire l'équation (2.13) comme

$$\begin{aligned} V(y(t)) &= \max_{x(\tau)} \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} f(x(\tau), y(\tau)) \\ &= \max_{x(t)} f(x(t), y(t)) + \max_{x(\tau)} \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \beta^{\tau-t} f(x(\tau), y(\tau)) \\ &= \max_{x(t)} f(x(t), y(t)) + \beta \max_{x(\tau)} \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} f(x(\tau+1), y(\tau+1)) \end{aligned}$$

Or $\max_{x(\tau)} \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} f(x(\tau+1), y(\tau+1)) = V(y(t+1))$ car c'est la fonction valeur du problème qui démarre à la date t avec le niveau $y(t+1)$ de la variable d'état.

Il apparaît alors que, pour tout niveau de la variable d'état $y(t)$ en une date t ; pour le contrôle $x(t)$ en t , l'équation (2.13) s'écrit

$$V(y(t)) = \max_{x(t)} (f(x(t), y(t)) + \beta V(y(t+1))) \text{ s/c } y(t+1) = y(t) + g(x(t), y(t))$$

En « gommant » le temps de l'écriture, il est possible de ne rechercher que des relations fonctionnelles entre les variables pertinentes

$$V(y) = \max_x (f(x, y) + \beta V(Y)) \text{ s/c } Y = y + g(x, y) \quad (2.15)$$

où Y est ici la variable qui retrace « $y(t+1)$ » pour tout t . L'équation récurrente de Bellman devient une équation fonctionnelle de Bellman dont la solution n'est plus une séquence infinie mais est représentée par une fonction invariante $p(y)$ appelée politique qui pour chaque valeur de l'état courant y donne la valeur optimale de l'état suivant Y . En outre, à partir de l'équation de mouvement, il est possible (notamment si g est inversible pour tout y et Y) de définir le contrôle x en fonction de y et Y , soit $x = G(Y, y)$. Dans ce cas, l'équation fonctionnelle de Bellman va s'écrire

$$V(y) = \max_{p(y)} (\phi(p(y), y) + \beta V(p(y))) \quad (2.16)$$

où $Y = p(y)$ est la politique à déterminer et $\phi(Y, y) = f(G(Y, y), y)$.

Théorème 2.13 *Le couple $\{x^*(t), y^*(t)\}$ pour $t \in \{1, \dots\}$ est la solution optimale du problème PD_{∞}^d si la condition nécessaire suivante est vérifiée pour tout y :*

$$V(y) = \phi(p^*(y), y) + \beta V(p^*(y)) \text{ avec } p^*(y) = \arg \max_Y \{\phi(Y, y) + \beta V(Y)\} \quad (2.17)$$

avec $\phi(Y, y) = f(x, y)$ où x est tel que $Y - y = g(x, y)$ et de telle sorte qu'à toute date t , $y^(t) = y$, $y^*(t+1) = p^*(y^*(t))$ et $x^*(t) = x$.*

Résolution. Comme la politique $p^*(y)$ dépend de la fonction valeur V elle-même inconnue, la solution de (2.17) implique de déterminer conjointement $p^*(y)$ et $V^*(y)$. Pour cela, il est nécessaire de faire fonctionner l'équation fonctionnelle de Bellman comme un algorithme qui converge vers la solution : on se donne une fonction valeur initiale quelconque et par itération successives, on fait apparaître la solution comme un *point fixe* pour le membre de droite l'équation (2.17), à savoir que la fonction valeur solution $V^*(y)$ doit obéir à la relation $V^*(y) = \max_{p(y)} \phi(p(y), y) + \beta V^*(y)$. Toutefois, des conditions supplémentaires de convergence, de bornage... sont nécessaires pour qu'une solution apparaisse. On ne développe pas ces aspects.

Le cas du producteur : Formons l'équation fonctionnelle de Bellman à partir du problème du producteur en temps discret et horizon infini qui s'écrit

$$\begin{aligned} \max_{q(t)} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \pi(q(t)) dt \\ s/c \quad s(t+1) = s(t) - q(t) \\ s(1) = S \quad \text{et} \quad s(t) \geq 0, \forall t \end{aligned}$$

Ici initialement le contrôle est $q \geq 0$, on peut donc substituer le contrôle $q = s - Y$ où $Y = s(t+1)$ dans le gain instantané et on détermine $\phi = \pi(s - Y)$. De plus, la non négativité de la production et du stock à chaque instant impliquent que $s - Y \geq 0$ et $Y \geq 0$. Ainsi l'équation (2.16) s'écrit

$$V(s) = \max_{Y \in [0, s]} (\pi(s - Y) + \beta V(Y))$$

où encore en posant $Y = p(s)$

$$V(s) = \max_{p(s) \geq 0; s-p(s) \geq 0} (\pi(s - p(s)) + \beta V(p(s))) \quad (2.18)$$

Exemple : À l'aide des spécifications précédentes et de (2.18), l'équation fonctionnelle de Bellman à résoudre est

$$V(s) = \max_{p(s) \geq 0; s-p(s) \geq 0} \left(12(s - p(s)) - \frac{3}{2}(s - p(s))^2 - 12 + \frac{1}{2} V(p(s)) \right)$$

Si on lance les itérations en supposant $V(s) = v^0(s) = 0, \forall s \geq 0$, on peut montrer que les politiques déterminées pendant les deux premières itérations ne permettent pas de faire apparaître une fonction valeur comme point fixe de l'équation fonctionnelle de Bellman. Toutefois, ces calculs débouchant sur des politiques linéaires (par morceaux) en s du type $p(s) = ds + e$ et des fonctions valeur quadratiques du type $V(s) = a + bs + cs^2$, on conjecture que la solution du problème admet cette forme où a, b, c, d, e sont des réels inconnus que l'on va chercher à déterminer. Écrivons l'équation fonctionnelle de Bellman pour cette solution conjecturée soit

$$a + bs + cs^2 = \max_{s \geq p \geq 0} \left(12(s - p) - \frac{3}{2}(s - p)^2 - 12 + \frac{1}{2}(a + bp + cp^2) \right) \quad (2.19)$$

En optimisant sur le membre de droite, on trouve (en se centrant sur la solution intérieure $s > p > 0$)

$$p^{\#}(s) = \frac{6s + b - 24}{2(3 - c)}$$

et (2.19) devient

$$a + bs + cs^2 = -\frac{1}{8} \frac{4ac - 96c - 12a + 48b - b^2 - 288}{3 - c} - \frac{1}{8} \frac{12b - 96c}{3 - c} s + \frac{3c}{2(3 - c)} s^2$$

Devant être vérifiée pour tout $s \geq 0$, il vient le système à identifier

$$\begin{cases} c = \frac{3c}{2(3-c)} \\ b = -\frac{1}{8} \frac{12b-96c}{3-c} \\ -d = \frac{c^2-48c+96d-112}{8(3-d)} + \frac{1}{2}e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 24 \end{cases}$$

donc $d = 1$ et $e = -4$, soit encore

$$\begin{aligned} p^\#(s) &= s - 4 \\ V^\#(s) &= 24 \end{aligned}$$

Cette solution n'est admissible que si $s \geq 4$. Pour $s \leq 4$ alors $p^\#(s) = 0$ et (2.19) devient

$$a + bs + cs^2 = 12s - \frac{3}{2}s^2 - 12 + \frac{1}{2}a$$

Par identification pour tout $s \geq 0$, il vient

$$\begin{cases} c = -\frac{3}{2} \\ b = 12 \\ a = -24 \end{cases} \quad \text{soit} \quad V^\#(s) = -24 + 12s - \frac{3}{2}s^2$$

Ainsi donc la solution du problème est déterminée par la politique

$$p^*(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 4 \\ s - 4 & \text{si } s \geq 4 \end{cases}$$

ce qui conduit à la règle de production

$$Q^*(s) = \begin{cases} s & \text{si } s < 4 \\ 4 & \text{si } s \geq 4 \end{cases}$$

On peut alors en déduire les trajectoires de la production et du gisement restant :

$$q^*(1) = Q^*(s(1)) = 4 \Rightarrow s^*(2) = p^*(6) = 2$$

$$q^*(2) = Q^*(s(2)) = 2 \Rightarrow s^*(3) = p^*(3) = 0$$

et donc $q^*(t) = s^*(t) = 0, \forall t > 3$.

2.4.2 Solution en temps continu

A. Horizon fini

En temps continu, le problème s'écrit PD_2 :

$$\begin{aligned} \max_{x(t)} \int_0^T f(x(t), y(t), t) dt \\ \text{s/c } y'(t) &= g(x(t), y(t), t) \\ y(0) &= y_0, \quad y(T) = y_T \end{aligned}$$

Le Principe d'optimalité restant valide en temps continu, les développements précédents débouchant sur l'équation (2.13) restent pertinents. Partons donc de cette équation pour trouver l'équivalent en continu. Pour cela, réécrivons (2.13) avec un pas de temps quelconque h . On obtient pour la fonction valeur en t :

$$V(y(t), t) = \max_{x(t)} (f(x(t), y(t), t)h + V(y(t+h), t+h))$$

ce qui revient à :

$$0 = \max_{x(t)} (f(x(t), y(t), t)h + V(y(t+h), t+h) - V(y(t), t))$$

Divisons les deux termes de l'équation par h , il vient :

$$0 = \max_{x(t)} \left(f(x(t), y(t), t) + \frac{V(y(t+h), t+h) - V(y(t), t)}{h} \right)$$

et faisons le tendre vers 0, on a en utilisant le théorème de la dérivée totale (annexe D.1) :

$$0 = \max_{x(t)} (f(x(t), y(t), t) + V'_{y(t)}(y(t), t)y'(t) + V'_t(y(t), t))$$

En insérant la contrainte de mouvement et en isolant les termes indépendants du contrôle $x(t)$, on obtient :

$$-V'_t(y(t), t) = \max_{x(t)} (f(x(t), y(t), t) + V'_{y(t)}(y(t), t)g(x(t), y(t), t))$$

Cette équation est appelée l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et permet de présenter le théorème :

Théorème 2.14 (Équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman). *Le couple $\{x^*(t), y^*(t)\}$ pour $t \in [0, T]$ est la solution optimale du problème PD_2 si la condition nécessaire suivante est vérifiée pour tout t :*

$$-V'_t(y^*(t), t) = \max_{x(t)} (f(x(t), y^*(t), t) + V'_{y(t)}(y^*(t), t)g(x(t), y^*(t), t)) \quad (2.20)$$

Résolution. L'équation (2.20) est une équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire une équation dont la solution est la fonction $V(y(t), t)$ à deux variables dont les dérivées partielles $V'_y(y(t), t)$ et $V'_t(y(t), t)$ satisfont cette équation, une fois insérée la solution issue du théorème 1.3, section 1.3. L'annexe C.3 présente quelques éléments de base pour résoudre cette catégorie d'équations.

Le cas du producteur : Rappelons que le problème du producteur de ressource non renouvelable est :

$$\begin{aligned} \max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} \pi(q(t)) dt \\ \text{s/c } s'(t) = -q(t) \\ s(0) = S, \quad s(T) = 0 \end{aligned}$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman est :

$$-V'_t(s(t), t) = \max_{q(t)} (e^{-rt} \pi(q(t)) - V'_{y(t)}(y(t), t)q(t))$$

La condition nécessaire est :

$$\begin{aligned} e^{-rt} \pi'(q(t)) - V'_{y(t)}(y(t), t) &= 0 \\ \Leftrightarrow q(t) &= \pi'^{-1} \left(e^{rt} V'_{y(t)}(y(t), t) \right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$-V'_t(s(t), t) = e^{-rt} \pi(\pi'^{-1}(e^{rt} V'_{y(t)}(y(t), t))) - V'_{y(t)}(y(t), t) \pi'^{-1}(e^{rt} V'_{y(t)}(y(t), t)) \quad (2.21)$$

Sans spécifier la fonction π , il n'est pas possible de résoudre cette équation.

Exemple : À l'aide des spécifications retenues jusqu'alors et puisque $\pi_e(q) = 12q - \frac{3}{2}q^2 - 12$, on a $\pi'^{-1}(x) = 4 - \frac{1}{3}x$ et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman du problème devient

$$-V'_t(s(t), t) = 12e^{-\frac{t}{2}} - 4V'_{s(t)}(s(t), t) + \frac{1}{6}e^{\frac{t}{2}}(V'_{s(t)}(s(t), t))^2 \quad (2.22)$$

L'équation aux dérivées partielles (2.22) est quadratique. Comme il est évoqué dans l'annexe C.3, la recherche de la solution $V(s(t), t)$ de cette équation se fait en conjecturant une forme quadratique en $s(t)$ du type

$$V(s(t), t) = \frac{1}{2}A(t)s(t)^2 + B(t)s(t) + C(t)$$

où $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ sont des fonctions dérivables inconnues.

Puisque $V(s(2), 2) = V(0, 2) = 0$ alors $C(2) = 0$. Après factorisation en $s(t)$, l'équation (2.22) devient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[A'(t) + \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}A^2(t) \right] s(t)^2 + \left[B'(t) - 4A(t) + \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}A(t)B(t) \right] s(t) \\ &+ C'(t) + \frac{1}{6}e^{\frac{t}{2}}B^2(t) - 4B(t) + 12e^{-\frac{t}{2}} = 0 \end{aligned}$$

Pour que cette équation soit vraie il faut que le polynôme du second degré en $s(t)$ qui la compose ait des coefficients identiquement nuls, ce qui implique la résolution du système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} A'(t) + \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}A^2(t) = 0 \\ B'(t) - 4A(t) + \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}A(t)B(t) = 0 \\ C'(t) + \frac{1}{6}e^{\frac{t}{2}}B^2(t) - 4B(t) + e^{-\frac{t}{2}}12 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équations différentielles d'ordre 1 à l'aide des techniques présentées dans l'annexe C.2 et en utilisant la condition $C^*(2) = 0$, on trouve que

$$\begin{aligned} A^*(t) &= \frac{3}{2e^{\frac{t}{2}} + 3k} \\ B^*(t) &= \frac{12t + K}{2e^{\frac{t}{2}} + 3k} \\ C^*(t) &= \frac{\left[24t^2 + 4tK + 48 + \frac{K^2}{6} \right] e^{-t} + 72ke^{-\frac{3t}{2}}}{2e^{\frac{t}{2}} + 3k} - \frac{\left[144 + 8K + \frac{K^2}{6} \right] e^{-2} + 72ke^{-3}}{2e + 3k} \end{aligned}$$

Pour lever les constantes K et k , il faut considérer les deux autres conditions $s(0) = 6$ et $s(2) = 0$. On trouvera $k^* = -\frac{2}{3}e$ et $K^* = -24$.

Le Principe d'optimalité se généralise aisément aux problèmes contenant une fonction terminale $F(y(T))$. En particulier, la fonction valeur à l'instant final T est $V(y(T), T) = F(y(T))$. Il s'ensuit le théorème :

Théorème 2.15 *Lorsque la fonction objectif comprend une fonction terminale, à l'équation (2.20) s'ajoute la condition aux bornes*

$$V(y(T), T) = F(y(T))$$

En d'autres termes, l'équation aux dérivées partielles formée par l'équation (2.20) est accompagnée par la condition aux bornes telle que la fonction valeur est égale à la fonction terminale.

B. Horizon infini

Lorsque le temps est continu, le problème autonome P_{D_∞} se note

$$\begin{aligned} \max_{x(t)} \int_0^\infty e^{-rt} \phi(x(t), y(t)) dt \\ s/c \quad y'(t) = g(x(t), y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{aligned}$$

Comme on l'a vu dans le cadre du contrôle optimal avec le théorème 2.9 de la section 2.3, l'horizon infini conduit dans un problème autonome à ce que la fonction valeur soit indépendante du temps. On a donc $V(y(t), t) = e^{-rt} V(y(t), 0)$ pour tout $y(t)$ et t . Cette écriture permet de simplifier l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. En effet, en notant $W(y(t)) = V(y(t), 0)$, l'équation (2.20) devient

$$r e^{-rt} W(y(t)) = \max_{x(t)} \left[e^{-rt} \phi(x(t), y(t)) + e^{-rt} W'(y(t)) g(x(t), y(t), t) \right]$$

En simplifiant par e^{-rt} , cette équation est maintenant une équation différentielle. D'où le théorème suivant :

Théorème 2.16 *Le couple $\{x^*(t), y^*(t)\}$ pour $t \in [0, \infty]$ est la solution optimale du problème P_{D_∞} si la condition nécessaire suivante est vérifiée pour tout t :*

$$r W(y^*(t)) = \max_{x(t)} \left(\phi(x(t), y^*(t)) + W'(y^*(t)) g(x(t), y^*(t), t) \right)$$

Le cas du producteur : Le problème est similaire à celui donné dans le cadre du contrôle optimal (cf. paragraphe 2.3.4) soit

$$\begin{aligned} \max_{q(t)} \int_0^\infty e^{-rt} \pi(q(t)) dt \\ s/c \quad s'(t) = -q(t) \\ s(0) = S \end{aligned}$$

En posant $W(s) = \int_0^\infty e^{-rt} \pi(q(t)) dt$ avec $s(0) = s$, l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit alors

$$r W(s(t)) = \max_{q(t)} (\pi(q(t)) - W'(s(t))q(t))$$

En considérant la condition nécessaire d'optimalité du problème d'optimisation statique associé, il vient la condition d'arbitrage (déjà commentée auparavant) :

$$\pi'(q(t)) = W'(s(t))$$

Puisque $\pi'(q(t))$ est monotone décroissant alors $q^*(t) = \hat{q}(s(t))$ où $\hat{q}(s) = (\pi')^{-1}(W'(s))$.

Exemple : Pour les spécifications retenues, la condition nécessaire donne $q(t) = 4 - \frac{1}{3}W'(s(t))$ et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman du problème devient une équation différentielle non linéaire en s où le temps t est « gommé »

$$\frac{1}{2}W(s) = 12 - 4W'(s) + \frac{1}{6}W'(s)^2$$

dont la condition initiale est $W(0) = 0$. En la résolvant comme une équation du second degré en $W'(s)$, deux solutions apparaissent

$$W' = 12 \pm \sqrt{3(W + 24)}$$

On peut les représenter dans un diagramme des phases qui pour chaque valeur de W associe la variation W' (figure 2.1).

On peut vérifier que la branche croissante correspond à des valeurs négatives de $q(t)$, elle est donc rejetée. La solution est ainsi représentée par la branche décroissante qui correspond à une courbe croissante concave pour $W(s)$. En effet, s'initialisant en $W = 0$, la variation de $W(s)$ est bien positive lorsque l'on se déplace le long de la courbe à droite de $W = 0$ et décroissante. L'existence de l'équilibre stable pour $W(s) = 24$ indique que cette valeur n'est jamais atteinte car si $W > 24$ alors $W(s)$ décroîtrait vers cet équilibre et la condition initiale $W(0) = 0$ ne serait jamais vérifiée. Ainsi qualitativement on peut indiquer que la solution $W^*(s)$ est comprise entre 0 et 24 et croissante concave en s .

Le lecteur pourra vérifier que la solution correspond à une fonction de Lambert ayant pour représentation graphique la figure 2.2.

2.4.3 Interprétations : lien avec le contrôle optimal

Revenons au cas où l'horizon est fini. Comme on l'a évoqué, la programmation dynamique est une approche plus générale que le contrôle optimal. Démontrons-le. Pour commencer, rappelons que la dérivée de la fonction valeur par rapport à l'état correspond à la variable adjointe, soit :

$$\lambda(t) = V'_{y(t)}(y(t), t) \quad (2.23)$$

Dès lors, le membre de droite de l'équation (2.20) débouche sur la condition

$$H'_{x(t)}(t) = 0$$

De la différentiation de (2.23), il vient :

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= V''_{y(t)y(t)}(y(t), t)y'(t) + V''_{ty(t)}(y(t), t) \\ &= V''_{y(t)y(t)}(y(t), t)g(x(t), y(t), t) + V''_{ty(t)}(y(t), t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

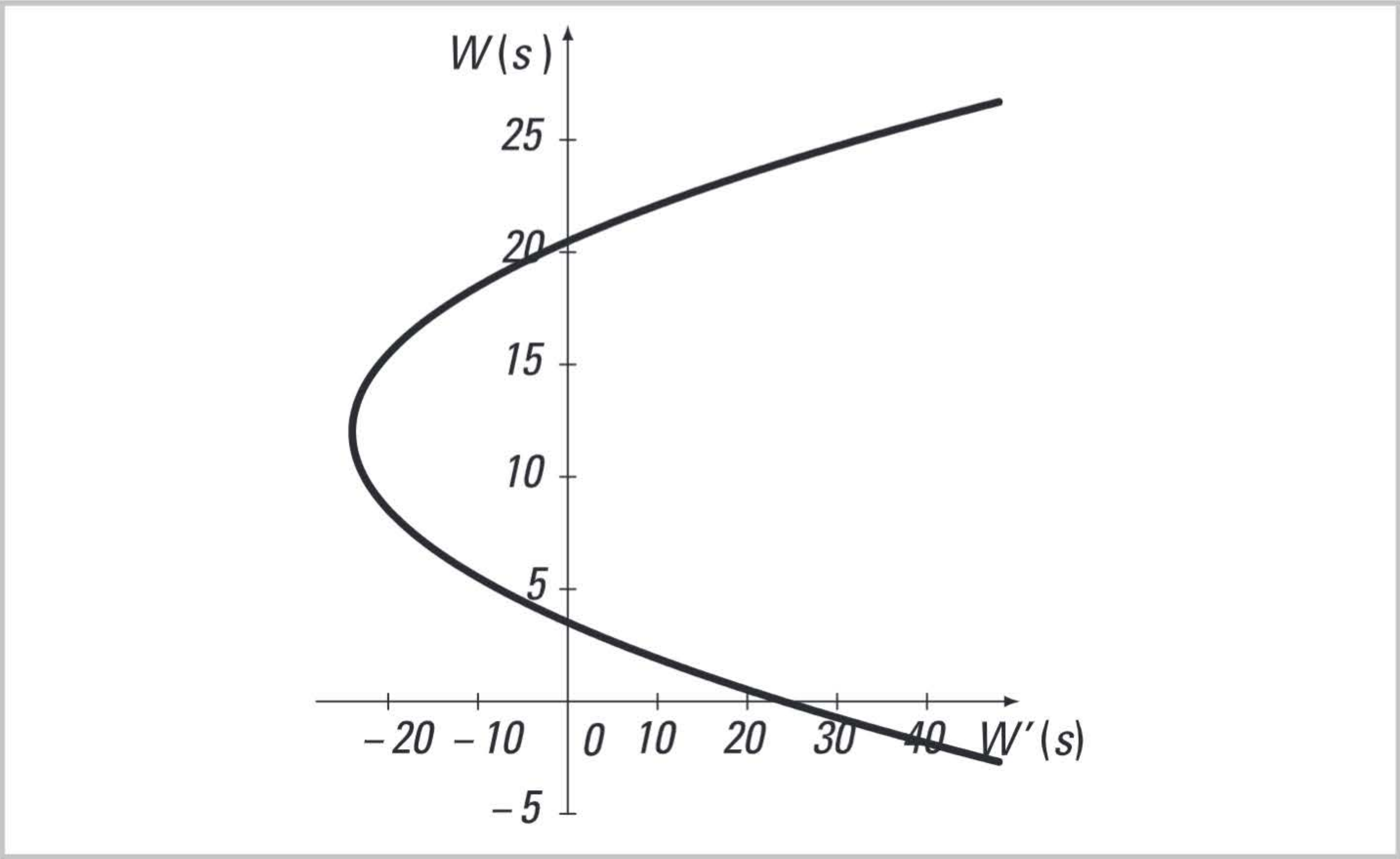


FIGURE 2.1
Diagramme des phases pour $W(s)$

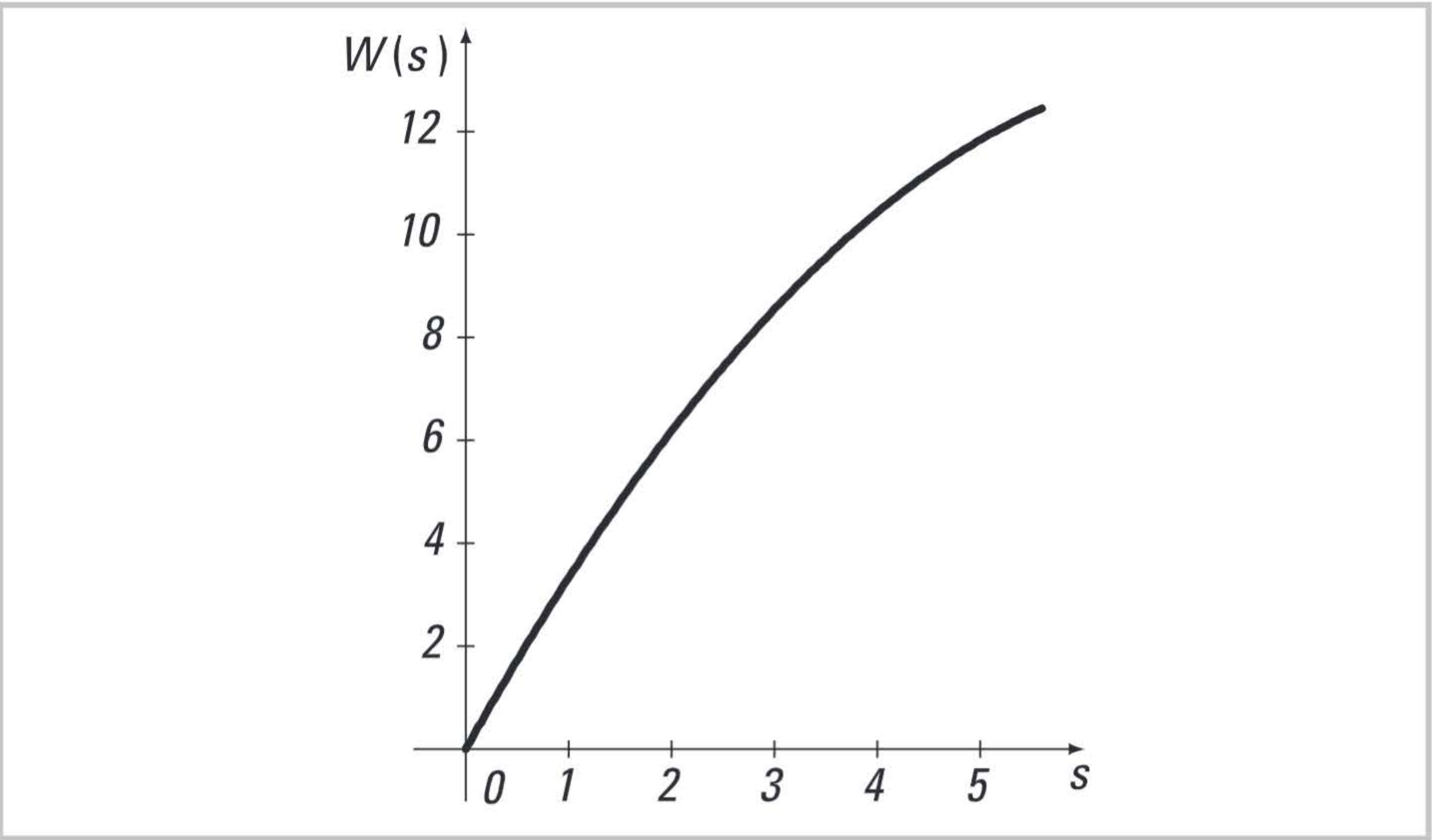


FIGURE 2.2
Fonction de Lambert : $W(s)$

Par suite, en dérivant (2.20) par rapport à $y(t)$, on obtient puisque le théorème de l'enveloppe (théorème 1.7, section 1.3), s'applique au contrôle :

$$-V''_{y(t)}(y(t), t) = f'_{y(t)}(x(t), y(t), t) + V''_{y(t)y(t)}(y(t), t)g(x(t), y(t), t) + V'_{y(t)}(y(t), t)g'_{y(t)}(x(t), y(t), t)$$

En insérant (2.24) dans l'équation précédente, on a :

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= -f'_{y(t)}(x(t), y(t), t) - \lambda(t)g'_{y(t)}(x(t), y(t), t) \\ \Leftrightarrow \lambda'(t) &= -H'_{y(t)}(t)\end{aligned}$$

Enfin, dans les problèmes comprenant une fonction terminale, puisque $\lambda(t) = V'_{y(t)}(y(t), t)$ pour tout t et qu'en T , $V(y(T), T) = F(y(T))$ il s'ensuit :

$$\lambda(T) = F'(y(T))$$

Ainsi donc, les interprétations réalisées pour le contrôle optimal peuvent être réitérées pour la programmation dynamique. Alors existe-il des différences entre ces deux méthodes de résolution ? La réponse est oui. Le Principe d'optimalité permet de déterminer des contrôles sous formes de règles de décisions, c'est-à-dire qui dépendent de la valeur de l'état courant $y(t)$: $x = x(y(t), t)$. On les appelle des politiques ou des contrôles en boucle fermée car le choix du contrôle à la date t se fait sur la base de ce qui est observé en matière d'état à cette même date $y(t)$. Si ces politiques ne dépendent pas du temps ($x = x(y)$) elles sont dites markoviennes ou rétroactives. Dans tous les cas, le Principe d'optimalité implique donc une cohérence temporelle dans les décisions. C'est une différence importante avec le Principe du maximum qui débouche sur des contrôles dits en boucle ouverte pour lesquels le contrôle dépend de la date et de l'état initial, soit : $x = x(y(0), t)$. Toutefois, dans de nombreux cas de figure, les trajectoires des solutions obtenues à l'aide de chaque principe sont identiques.

L'intérêt d'obtenir des contrôles en boucle fermée est de permettre d'étudier les cas où le mouvement de la variable d'état est perturbé par une composante aléatoire (l'évolution n'est plus déterministe) ou par une décision non contrôlée (l'état est affecté par les décisions d'une entreprise concurrente par exemple).

Exemple : Vérifions pour l'exploitation de la ressource non-renouvelable que la solution du contrôle optimal obéit à l'équation de la programmation dynamique (2.22). Pour cela, réitérons le Principe du maximum pour tout problème démarrant à chaque date t entre 0 et T sachant que $s(t) = s$ quelconque et $s(T) = 0$. Conservons comme seule spécification la fonction de profit $\pi_e(q(t)) = 12q(t) - 3q(t)^2 - 12$. Ainsi le niveau d'extraction est

$$q(\tau) = 4 - e^{r\tau} \frac{\lambda(t)}{3}$$

où $\lambda(t)$ est la variable adjointe constante sur la période $[t, T]$ qui se déduit implicitement de :

$$\int_t^T \left(4 - e^{r\tau} \frac{\lambda(t)}{3} \right) d\tau = s(t) \Leftrightarrow 4(T-t) - \left(\frac{e^{rT} - e^{rt}}{r} \right) \frac{\lambda(t)}{3} = s(t)$$

soit $\lambda^*(t) = r \frac{12(T-t) - 3s(t)}{e^{rT} - e^{rt}}$ et donc $q^*(\tau) = 4 - re^{r\tau} \frac{4(T-t) - s(t)}{e^{rT} - e^{rt}}$. La fonction valeur pour tout t devient

$$\begin{aligned} V(s(t), t) &= \int_t^T e^{-r\tau} [12q^*(\tau) - 3q^*(\tau)^2 - 12] d\tau = \int_t^T \left[12e^{-r\tau} - \frac{3r^2}{2} e^{r\tau} \left(\frac{4(T-t) - s(t)}{e^{rT} - e^{rt}} \right)^2 \right] d\tau \\ &= \frac{12}{r} (e^{-rt} - e^{-rT}) - \frac{3r}{2} \frac{(4(T-t) - s(t))^2}{e^{rT} - e^{rt}} \end{aligned}$$

Les dérivées partielles en jeu dans l'équation de la programmation dynamique (2.22), sont

$$\begin{aligned} V'_{s(t)}(s(t), t) &= 3r \frac{4(T-t) - s(t)}{e^{rT} - e^{rt}} \\ V'_t(s(t), t) &= -12e^{-rt} + \frac{3r}{2} \frac{4(T-t) - s(t)}{(e^{rT} - e^{rt})^2} (8(e^{rT} - e^{rt}) - re^{rt}(4(T-t) - s(t))) \end{aligned}$$

En substituant dans le membre de droite de (2.22) cela implique

$$\begin{aligned} &12e^{-rt} - 4V'_{s(t)}(s(t), t) + \frac{1}{6} e^{rt} (V'_{s(t)}(s(t), t))^2 \\ &= 12e^{-rt} - 12r \frac{4(T-t) - s(t)}{e^{rT} - e^{rt}} + \frac{3r^2}{2} e^{rt} \left(\frac{4(T-t) - s(t)}{e^{rT} - e^{rt}} \right)^2 \\ &= 12e^{-rt} - \frac{3r}{2} \frac{4(T-t) - s(t)}{(e^{rT} - e^{rt})^2} [8r(e^{rT} - e^{rt}) - re^{rt}(4(T-t) - s(t))] \\ &= -V'_t(s(t), t) \end{aligned}$$

ce qui montre donc que (2.22) est bien vérifiée.

2.4.4 Conditions suffisantes

Avançons le théorème suivant.

Théorème 2.17 (Suffisance du principe d'optimalité). *La condition (2.20) est également une condition suffisante.*

La démonstration de ce théorème fait appel à des outils hors du champ de ce manuel. Mais en voilà l'intuition. Par définition, la programmation dynamique est une procédure de calcul qui garantit de trouver la solution optimale puisqu'elle oblige à travailler sur la fonction valeur du problème à résoudre. Ainsi, si l'on trouve la fonction valeur, l'équation (2.20) est nécessaire et suffisante pour que le contrôle que l'on en tire soit optimal. La difficulté de cette équation est que la fonction valeur solution n'est pas forcément unique ni continue. Pour s'en assurer, des conditions (non étudiées ici) de continuité des fonctions et de compacité des ensembles doivent être assurées.

2.5 APPLICATIONS

On présente dans cette section un ensemble de modèles d'économie et de gestion usuels dont l'analyse s'effectue au travers de la résolution de problèmes d'optimisation dynamique. On les répartit selon la méthode de résolution : le contrôle optimal puis la pro-

grammation dynamique. Dans le même esprit que l'optimisation statique, seules les conditions nécessaires et de transversalité sont présentées sans renvoi aux théorèmes auxquels elles se réfèrent.

2.5.1 Contrôle Optimal

A. Problèmes dépendant du temps

Livraison de production. Un atelier fabrique des produits, en quantité totale $y(t)$, livrables en une date donnée T à un client au prix de vente unitaire $p > 0$. Pour cela, en considérant que le temps est discret, l'atelier doit supporter à chaque date $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ des dépenses de fabrication, notées $x(t) \geq 0$, qui permettent de soutenir un niveau de production en date t de $F(x(t))$ où on suppose que $F(x(t)) = \sqrt{x(t)}$. Les quantités totales fabriquées à la date t s'accroissent donc avec le niveau de la production $F(x(t))$ mais peuvent décroître à un taux de perte $\delta > 0$ provenant des effets conjugués des dégradations, des accidents de manutention etc. Ainsi, la quantité totale fabriquée varie selon la relation

$$y(t+1) = y(t) + \sqrt{x(t)} - \delta y(t) \quad (2.25)$$

Initialement le stock de produits est nul, soit $y(0) = 0$.

En valeur actualisée, au taux $r > 0$, le bénéfice de la vente totale sur le marché à la date de livraison T est égal à $\beta^T p y(T)$ où $\beta = \frac{1}{1+r}$ est le facteur d'actualisation. Le chef d'atelier cherche à maximiser Π , le profit total actualisé en contrôlant le rythme de la production $x(t)$ et la date de livraison T

$$\Pi = - \sum_{t=0}^{t=T-1} \beta^t x(t) + p \beta^T y(T).$$

La solution à ce problème $(x^*(t), y^*(t))$ obéit au Principe du maximum en temps discret. On identifie la production cumulée $y(t)$ comme l'état et la production instantanée $x(t)$ comme le contrôle. On écrit le hamiltonien $H(t) = -\beta^t x(t) + \lambda(t) (\sqrt{x(t)} - \delta y(t))$. Les conditions nécessaires et de transversalité⁵ sont :

$$\begin{aligned} H'_{x(t)} &= -\beta^t + \frac{\lambda(t)}{2\sqrt{x(t)}} = 0 \\ \lambda(t+1) - \lambda(t) &= -H'_{y(t)} = \lambda(t)\delta \\ \lambda(T) &= p\beta^T \end{aligned}$$

La production courante $x(t)$ égalise à chaque instant la dépense actualisée $(1 \times \beta^t)$ au gain marginal futur de cette production $\lambda(t)F'(x(t))$. Le prix implicite $\lambda(t)$ de la production représente le prix à payer pour accroître la production. Il s'accroît au taux de

⁵ La condition de transversalité est identique à celle du temps continu (voir paragraphe 2.3.3).

la dépréciation physique de la production pour atteindre en T , la valeur (actualisée) de marché $p\beta^T$. Donc en résolvant l'équation de récurrence homogène en $\lambda(t)$ (voir la remarque de l'annexe C.2), on a $\lambda(t) = \Lambda(1+\delta)^t$ et $\lambda(T) = \Lambda(1+\delta)^T = p\beta^T$ d'où $\Lambda^* = p\left(\frac{\beta}{1+\delta}\right)^T$. Ainsi $\lambda^*(t) = p\beta^T(1+\delta)^{t-T}$, on obtient que le contrôle est tel que :

$$x^*(t) = \frac{p^2}{4} \left(\frac{\beta}{1+\delta} \right)^{2(T-t)}$$

On note que $x^*(T) = \frac{1}{4}p^2$. On peut alors déterminer la trajectoire de la production totale $y^*(t)$ qui est telle que (2.25) soit résolue avec $y(0) = 0$, soit

$$y(t+1) = \frac{p}{2} \left(\frac{\beta}{1+\delta} \right)^{(T-t)} + (1-\delta)y(t)$$

En résolvant l'équation récurrente (remarque de l'annexe C.2), on obtient

$$y^*(t) = \frac{p\beta}{2(1+\delta-\beta+\beta\delta)} \left(\frac{\beta}{1+\delta} \right)^T \left[\left(\frac{1+\delta}{\beta} \right)^t - (1-\delta)^t \right]$$

ce qui permet d'observer que la production cumulée peut décroître au delà d'une date t^* définie par

$$\left(\frac{1+\delta}{\beta(1-\delta)} \right)^t = \frac{\ln(\beta(1-\delta))}{\ln(1+\delta)}$$

Gestion de stock. La gestion de stock, on l'a vu dans le cadre statique, implique de maîtriser le rythme de commande afin de rendre minimal le coût total de stockage. Il est possible de prolonger ce problème dans un cadre dynamique (voir Kamien et Schwartz, 1991). Pour cela, il faut observer que la commande $x(t)$ passée en date t permet d'accroître le stock $y(t)$ d'un montant $x(t)$, c'est-à-dire que $y'(t) = x(t)$. Le coût d'acquisition à la date t se note $C_a(x(t))$, tandis que le coût de détention est $C_d(y(t))$. En considérant que le stock initial $y(0)$ est normalisé à zéro et qu'il est nécessaire pour la satisfaction de la demande de disposer en date finale T d'un stock de \bar{y} ($\bar{y} > 0$), le problème s'écrit

$$\begin{aligned} \min_{x(t)} \int_0^T [C_a(x(t)) + C_d(y(t))] dt \\ y'(t) = x(t) \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y(T) \geq \bar{y} \\ x(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Pour effectuer la résolution, prenons le cadre simple suivant

$$C_a(x) = \frac{1}{2}ax^2 + k \quad \text{et} \quad C_d(y) = hy$$

avec a , k et h des constantes positives. Le coût d'acquisition est tel que les commandes importantes sont de plus en plus chères pour refléter des contraintes de livraison et de rationnement alors que le coût de détention est proportionnel au volume stocké.

En posant le hamiltonien du problème $H = -\frac{1}{2}ax(t)^2 - k - hy(t) + \lambda(t)x(t)$, les conditions nécessaires et de transversalité s'écrivent

$$\begin{aligned} x(t)H'_{x(t)} &= x(t)(-ax(t) + \lambda(t)) = 0 \\ H'_{x(t)} &= -ax(t) + \lambda(t) \leq 0 \\ \lambda'(t) &= -H'_{y(t)} = h \\ \lambda(T)(y(T) - \bar{y}) &= 0, \lambda(T) \geq 0 \text{ et } y(T) - \bar{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Tout d'abord, discutons la condition de transversalité. Si on suppose que $y(T) - \bar{y} > 0$, alors $\lambda(T) = 0$ et donc pour tout $t \in [0, T[$, il vient $\lambda(t) < 0$, ce qui implique à son tour

$$-ax(t) + \lambda(t) < 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

Apparaît alors une contradiction puisque $y'(t) = 0$ et la condition initiale $y(0) = 0$ conduisent à la trajectoire $y(t) = 0$ pour tout t , ce qui contredit $y(T) - \bar{y} > 0$. Ainsi, nécessairement $\lambda(T) > 0$ et il vient $y(T) = \bar{y}$.

Puis, l'équation $\lambda'(t) = h$ implique par intégration que $\lambda(t) = ht + l$ où l est une constante inconnue pour l'instant. Comme $\lambda(t)$ est croissant et que $\lambda(T) > 0$, il en résulte qu'il peut exister une date

$$t^* = -\frac{l}{h}$$

en deçà de laquelle $\lambda(t) \leq 0$ et, de part la première condition nécessaire, $x(t) = 0$. Au delà de cette date, les commandes sont lancées à hauteur de $x(t) = \frac{ht+l}{a}$ et croissent dans le temps.

La valeur optimale de l est celle qui vérifie l'équation de mouvement du stock une fois intégrée :

$$\bar{y} = \int_0^{t^*} 0 dt + \int_{t^*}^T \frac{ht+l}{a} dt \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{(T+hl)^2}{2ah}$$

La racine négative en l conduisant à des commandes négatives et à $t^* > T$, la valeur optimale de l est donnée par $l^* = 2\sqrt{\bar{y}ah} - Th$ ce qui correspond à une date $t^* = T - 2\sqrt{\frac{\bar{y}a}{h}}$.

Ainsi, si $T \leq 2\sqrt{\frac{\bar{y}a}{h}}$, alors $t^* < 0$ et la commande en t est toujours positive est égale à

$$x^*(t) = \frac{1}{a} \left(2\sqrt{\bar{y}ah} - (T-t)h \right)$$

et le stock évolue comme

$$y^*(t) = \bar{y} - \frac{1}{2a} \left[(T-t) \left(4\sqrt{\bar{y}ah} - Th \right) \right] - t(T-t)h$$

En revanche, si $T > 2\sqrt{\frac{\bar{y}a}{h}}$, $t^* > 0$, les trajectoires optimales de la commande et du stock arborent un régime nul où $(x^*(t), y^*(t)) = (0, 0)$ pour $t \leq t^*$, puis suivent les trajectoires positives ci-dessus pour $t > t^*$. Cette solution apparaît si l'horizon T est suffisamment éloigné. Dès lors, il est optimal de ne pas débiter le stockage coûteux à la date 0 si le responsable du stock dispose de suffisamment de temps. Par le jeu d'une statique comparative, cela est d'autant plus vrai que le stock final \bar{y} et le paramètre d'échelle dans le coût d'acquisition a sont faibles et que le coût marginal de la détention h est élevé.

Marketing. Une branche des sciences de gestion s'intéresse aux conditions dans lesquelles les dépenses publicitaires des entreprises affectent leur capital clientèle (aussi nommé goodwill). Celui-ci représente un bien intangible et immatériel correspondant à la réputation de l'entreprise auprès des consommateurs, qui lui permet de réaliser des ventes profitables. Dans le modèle de base de Arrow et Nerlove (1962), une firme gère son capital clientèle représenté par la variable $y(t)$ pour la période t en effectuant régulièrement des campagnes de publicité. Ces campagnes entraînent des dépenses $c(x(t))$ qui correspondent à un effort de publicité $x(t) \geq 0$ agissant sur l'évolution de la notoriété de la marque auprès de la demande. La fonction c est croissante convexe avec $c(0) = c'(0) = 0$. L'effort de publicité a pour but d'attirer des clients vers le produit de la firme, cependant, le goodwill a tendance à s'éroder sous la pression des produits concurrents. En notant $\delta > 0$ le taux d'érosion de la clientèle, le goodwill est donc soumis à la dynamique :

$$y'(t) = x(t) - \delta y(t)$$

Sur un horizon de temps infini, l'objectif de la firme est la maximisation des profits totaux actualisés

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} [\pi y(t) - c(x(t))] dt$$

où $\pi > 0$ est la profitabilité du goodwill et $r > 0$ le taux d'actualisation. En outre, on suppose qu'en date $t = 0$, la firme est nouvelle sur le marché, soit $y(0) = 0$.

Résolvons le problème en appliquant le Principe du maximum. Le hamiltonien est

$$H = e^{-rt} [\pi y(t) - c(x(t))] + \lambda(t) (x(t) - \delta y(t))$$

où $\lambda(t)$ est la variable adjointe au goodwill. Les conditions nécessaires et de transversalité sont :

$$H'_{x(t)} = -e^{-rt} c'(x(t)) + \lambda(t) \leq 0$$

$$x(t) H'_{x(t)} = x(t) (\lambda(t) - e^{-rt} c'(x(t))) = 0$$

$$-H'_{y(t)} = \lambda'(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) = -e^{-rt} \pi + \lambda(t) \delta$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) (\hat{y}(t) - y(t)) \geq 0$$

où $\hat{y}(t)$ est, sur l'infini, le maximum de goodwill réalisable atteignable.

Tout d'abord, l'équation différentielle du premier ordre en $\lambda(t)$ étant linéaire à coefficient constant, elle peut être résolue directement (voir annexe C.2). Cela donne $\lambda^*(t) = \frac{\pi}{r+\delta} e^{-rt} + e^{\delta t} k$ où k est une constante inconnue.

Ensuite, pour tout $\hat{y}(t)$ admissible, c'est-à-dire tel que $\hat{y}'(t) = x(t) - \delta \hat{y}(t)$ avec $\hat{y}(0) = 0$, l'équation différentielle du premier ordre linéaire en $\hat{y}(t)$ peut aussi être résolue pour tout $x(t) \geq 0$. Il vient $\hat{y}^*(t) = e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta \tau} x(\tau) d\tau$. Il est clair que si $x(\tau) < 1$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = 0$, et donc la condition de transversalité implique forcément que $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$. Ainsi, puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\delta t} \rightarrow \infty$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda^*(t) = 0 \Rightarrow k = 0$$

et $\lambda^*(t)$ est décroissant car $\lambda^{*'}(t) = -\pi r \frac{e^{-rt}}{r+\delta} < 0$.

Enfin les conditions sur le contrôle optimal $x^*(t)$ impliquent que la dépense ne peut être nulle en une date finie. En effet, si $x^*(t) = 0$ alors $-e^{-rt} c'(0) + \frac{\pi}{r+\delta} e^{-rt} = \frac{\pi}{r+\delta} e^{-rt} > 0$ ce qui conduit à une contradiction. On en déduit que $x^*(t)$ est strictement positif et tel que

$$e^{-rt} c'(x^*(t)) = e^{-rt} \frac{\pi}{r+\delta}$$

La politique optimale de publicité implique donc que la dépense marginale actualisée en publicité, $e^{-rt} c'(x^*(t))$, soit égale au prix implicite du client marginal à chaque instant, $e^{-rt} \frac{\pi}{r+\delta}$. Ce prix implicite est la valeur que la firme est prête à payer (et qu'elle paie puisqu'elle la dépense en publicité) pour attirer un nouveau client. Cette valeur marginale se déprécie à un taux égal au manque à gagner actualisé net d'un client perdu ($-\lambda'(t) = \pi r \frac{e^{-rt}}{r+\delta}$) de sorte que sur l'infini le « client marginal » est sans valeur, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$.

Maintenance. En suivant Helmer (1970), considérons qu'une machine acquise à un coût d'investissement de I € en date $t=0$ peut être vendue en tout instant à sa valeur de marché $v(t)$. En la faisant fonctionner, le propriétaire de la machine obtient un revenu $r(t)$ proportionnel à cette valeur, soit $r(t) = p v(t)$ où $p > 0$. La valeur du matériel $v(t)$ évolue au fil du temps selon la dépréciation constatée $d(t) = \delta t \geq 0$ et les réparations et améliorations effectuées notées $f(m(t))$ grâce à des dépenses de maintenance $m(t) \geq 0$. La fonction f est ici posée $f(m(t)) = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m(t)}{\mu}\right) m(t)$ où $\mu > 0$. Ainsi, la dynamique de la valeur de la machine est donnée par :

$$v'(t) = f(m(t)) - d(t) \quad (2.26)$$

sachant que par définition $v(0) = I$. Le propriétaire désire optimiser l'usage de la machine et cherche à maximiser la somme actualisée (au taux $r < p$) de ses revenus nets des dépenses de maintenance, sachant qu'en une date T qu'il désire fixer, la valeur résiduelle de la machine est $e^{-rT} v(T)$.

On forme le problème de contrôle optimal correspondant avec $m(t)$ le contrôle et $v(t)$ l'état :

$$\begin{aligned} \max \Pi &= -I + \int_0^T e^{-rt} (pv(t) - m(t)) dt + e^{-rT} v(T) \\ v'(t) &= \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m(t)}{\mu}\right) m(t) - \delta t \quad \text{avec } v(0) = I > 0 \\ m(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

Pour appliquer le Principe du maximum, formons le hamiltonien :

$$H(t) = e^{-rt} (pv(t) - m(t)) + \lambda(t) \left(\left(1 - \frac{1}{2} \frac{m(t)}{\mu}\right) m(t) - \delta t \right)$$

où $\lambda(t)$ est la variable adjointe à $v(t)$. Dans ce problème où existe une valeur terminale, $\{v(t), m(t)\}$ est solution du problème si :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} H'_{m(t)} = -e^{-rt} + \lambda(t) \left(1 - \frac{m(t)}{\mu}\right) \leq 0 \\ m(t) H'_{m(t)} = m(t) \left(-e^{-rt} + \lambda(t) \left(1 - \frac{m(t)}{\mu}\right) \right) = 0 \end{cases} \\ \lambda'(t) &= -H'_{v(t)} = -e^{-rt} p \\ \lambda(T) &= e^{-rT} \\ H(T) + \frac{\partial V(T)}{\partial T} &= 0 \Leftrightarrow (p - r)v(T) = \frac{m(T)}{\mu} + \delta T \end{aligned}$$

Pour l'instant travaillons à T donné. On détermine la trajectoire de $\lambda(t)$ en intégrant $\lambda'(t) = -e^{-rt} p$, soit $\lambda(t) = e^{-rT} + \frac{p}{r} (e^{-rt} - e^{-rT})$. La variable adjointe à $v(t)$ est toujours positive et décroissante. Elle s'interprète comme le prix fictif de l'accroissement en t d'une unité de la valeur courante de la machine ou encore la somme actualisée en $t = 0$ des revenus engendrés par une dépense de 1€ en maintenance.

L'allure de la trajectoire de maintenance $m(t)$ est telle que si $m(t) = 0$ en t alors

$$\left(e^{-rt} - e^{-rT} \right) \frac{p-r}{r} \leq 0$$

On en déduit logiquement que la maintenance est stoppée en date de cession, $m(T) = 0$. Auparavant, pour $t < T$, $m(t) > 0$ et il vient

$$m^*(t) = \mu \left(\frac{p-r}{p} \right) \frac{1 - e^{-r(T-t)}}{1 - \left(\frac{p-r}{p} \right) e^{-r(T-t)}} < \mu$$

On peut alors déterminer la trajectoire de la valeur de la machine en intégrant (2.26) soit

$$v^*(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^*(t)}{\mu} \right) m^*(t) dt - \frac{\delta}{2} t^2 + I$$

Cela permet de chercher la date optimale de cession T selon :

$$(p - r)v(T) = \frac{0}{\mu} + \delta T \Leftrightarrow v(T^*) = \frac{\delta}{p - r} T^*$$

La date optimale de revente est telle que le revenu procuré par la machine, $pv(T)$, doit être compensé par la perte de valeur δT et les charges d'intérêt $rv(T)$ supportés lorsque son exploitation est prolongée d'un délai marginal $T + \Delta T$.

Ressources naturelles renouvelables. En économie de l'environnement, on s'intéresse à la gestion et l'utilisation optimale des ressources naturelles minérales, végétales ou animales. La question centrale est de savoir selon quels principes effectuer le partage dans le temps de ces ressources sachant qu'elles sont potentiellement ou inexorablement épuisables (voir Clark et alii, 1979). On a vu tout au long de ce chapitre, quels types de problèmes d'optimisation dynamique pouvaient émerger dans le cas de la gestion de ressources non renouvelables.

Ici on considère le cas de ressources naturelles de type animale ou végétale, c'est-à-dire en mesure de se renouveler naturellement par reproduction biologique. C'est ce que l'on nomme les modèles de pêche si la ressource est assimilée à un stock de poisson (biomasse animale) ou bien d'exploitation forestière si la ressource est un parc forestier.

Considérons une population de poisson décrite par une variable de stock $s(t)$ évalué par la masse exploitable (en tonnes par exemple). La dynamique de ce stock est le solde entre un ensemble de prélèvements $q(t)$ (la pêche) et un apport de ressources dû à la reproduction naturelle de l'espèce $r(t)$. La reproduction est fonction de la taille du stock de sorte qu'elle est décrite via une relation $r(t) = g(s(t))$ où $g(s(t))$ est une fonction concave (unimodale) telle que $g(0) = 0$ et $g'(\bar{s}) = 0$ où \bar{s} est le rendement maximal durable, à savoir le niveau de stock qui conduit à la reproduction la plus importante. Ainsi, la dynamique de cette ressource naturelle renouvelable s'écrit

$$s'(t) = g(s(t)) - q(t) \quad \text{avec } s(0) > 0 \quad (2.27)$$

Le problème standard consiste à planifier les prélèvements $q(t)$ de manière à optimiser la somme actualisée des flux d'utilité issus de la consommation de ces prélèvements, soit

$$\max_{q(t)} \int_0^T e^{-rt} u(q(t)) dt$$

étant donné le mouvement (2.27) et où T est la date à partir de laquelle on choisit d'abandonner l'exploitation de sorte que $s(T) \geq 0$. Ici la fonction croissante concave

u décrit l'utilité de la consommation du prélèvement de ressource. On suppose que $u(0) = 0$ et $u'(0) > 0$.

Les conditions nécessaires et de transversalité s'écrivent :

$$H'_{q(t)} = e^{-rt} u'(q(t)) - \lambda(t) = 0 \quad (2.28)$$

$$\lambda'(t) = -H'_{s(t)} = -\lambda(t) g'(s(t)) \quad (2.29)$$

$$\lambda(T) s(T) = 0, \lambda(T) \geq 0 \text{ et } s(T) \geq 0 \quad (2.30)$$

où l'hamiltonien s'écrit $H(t) = e^{-rt} u(q(t)) + \lambda(t) (g(s(t)) - q(t))$ avec $\lambda(t)$ la variable adjointe à $s(t)$. On note que du moment où $\lambda(t)$ est non négatif, $H(t)$ est concave en (s, q) . En outre comme l'horizon est endogène on doit vérifier

$$H(T) = e^{-rT} u(q(T)) + \lambda(T) (g(s(T)) - q(T)) = 0 \quad (2.31)$$

Supposons $s(T) > 0$ sur un horizon fini, alors $\lambda(T) = 0$ et d'après (2.31) il vient forcément $q(T) = 0$, ce qui rend (2.28) contradictoire puisque $u'(0) > 0$. De même si $\lambda(T) > 0$ sur un horizon fini, alors $s(T) = 0$ et d'après (2.31) on doit vérifier $u(q(T)) - u'(q(T))q(T) = 0$. Cela implique à nouveau $q(T) = 0$ car la fonction $v(q) = u(q) - u'(q)q$ est strictement croissante et telle que $v(0) = 0$. Une contradiction apparaît également.

Ainsi, l'horizon ne peut-être fini et donc $T^* \rightarrow \infty$. Dès lors, on vérifie que $\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(T) = 0$. En effet, si $\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-rT} u'(q(T)) \rightarrow \infty$ alors il est nécessaire que $\lim_{T \rightarrow \infty} q(T) \rightarrow \infty$, ce qui implique que $\lim_{T \rightarrow \infty} q'(T) > 0$. Mais une nouvelle contradiction voit le jour car selon (2.28) il vient :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda'(T) = -r e^{-rT} u'(q(T)) + e^{-rT} u''(q(T)) q'(T) = -\infty.$$

Ainsi (2.31) est bien toujours vérifiée.

Au delà de cette discussion, le caractère générique des fonctions u et g rend impossible une résolution explicite des trajectoires solutions. Il est nécessaire de procéder à l'analyse du diagramme des phases du système différentiel en (λ, s) issu des conditions nécessaires et de l'équation de mouvement (voir annexe C.2). Cependant, pour analyser directement la trajectoire solution, il est préférable de se placer dans le plan des variables économiques, soit (s, q) . Pour cela, on différencie (2.28) par rapport au temps de manière à faire apparaître $\lambda'(t)$ soit

$$\lambda'(t) = -r e^{-rt} u'(q(t)) + e^{-rt} u''(q(t)) q'(t). \quad (2.32)$$

En substituant (2.29), il vient

$$\begin{aligned} e^{-rt} u'(q(t)) \{r - g'(s(t))\} &= e^{-rt} u''(q(t)) q'(t) \\ \Rightarrow q'(t) &= \frac{u'(q(t))}{u''(q(t))} \{r - g'(s(t))\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

On obtient donc le système différentiel autonome en (s, q)

$$\begin{cases} s'(t) = g(s(t)) - q(t) \\ q'(t) = \frac{u'(q(t))}{u''(q(t))} \{r - g'(s(t))\} \end{cases}$$

dont l'équilibre (q^e, s^e) est tel que $q^e = g(s^e)$ et $g'(s^e) = r$ et puisque g est concave alors forcément $s^e < \bar{s}$. Ainsi, en traçant les deux isoclines et en étudiant les variations de q et s , on peut représenter la dynamique des trajectoires dans le diagramme des phases qui montre que l'équilibre est un point selle. En effet, la matrice jacobienne (voir annexe A) du système évaluée au point (q^e, s^e) s'écrit

$$JG(q^e, s^e) = \begin{pmatrix} r & -\frac{u'(q^e)}{u''(q^e)} g''(s^e) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et du fait de la concavité des fonctions u et g , cette matrice est telle que $\text{tr}(JG(q^e, s^e)) = r > 0$ et $\det(JG(q^e, s^e)) = -\frac{u'(q^e)}{u''(q^e)} g''(s^e) < 0$ avec deux valeurs propres réelles de signes opposés.

Analysons à partir de la figure 2.3 les conditions de l'épuisement éventuel de la ressource et le comportement de prélèvement sur l'infini. On remarque que la solution optimale converge forcément vers l'équilibre stationnaire sur l'infini. En effet, la lecture du diagramme montre que pour toute condition initiale $s(0) > 0$ (dans chacun des 4 isosecteurs) toutes les trajectoires divergentes impliquent soit que $q(T) \rightarrow \infty$ soit que $\lim_{T \rightarrow \infty} s(T) > \bar{s}$. Cela contredit le fait que $\lambda(t)$ est forcément positif décroissant. Ainsi donc pour toute condition initiale $s(0) > 0$, il est optimal de choisir $q(0)$ de manière à se placer sur la branche stable du point selle et de converger de manière monotone vers l'équilibre stationnaire (q^e, s^e) .

Si $s(0) < s^e$ alors prélèvement et stock croissent et inversement dans l'autre cas. Ainsi, il est optimal de prélever la ressource de manière à ce que son stock soit inférieur au rendement maximal durable : c'est un phénomène de surexploitation durable qui est ici décrit.

Remarque : Pour être complet, la convergence vers l'équilibre en point selle est ici assurée par un choix optimal de la pêche en $t = 0$. En effet, c'est toujours le cas pour les problèmes autonomes avec horizon infini car l'hamiltonien concave et le taux d'actualisation positif font que la trajectoire qui mène à l'équilibre stationnaire en point selle est une trajectoire optimale (voir les développements sur la stabilité de l'équilibre stationnaire dans l'annexe C.2).

Croissance économique. L'analyse macroéconomique de la croissance est le plus souvent conduite au travers d'un modèle néoclassique cherchant, dans un cadre très

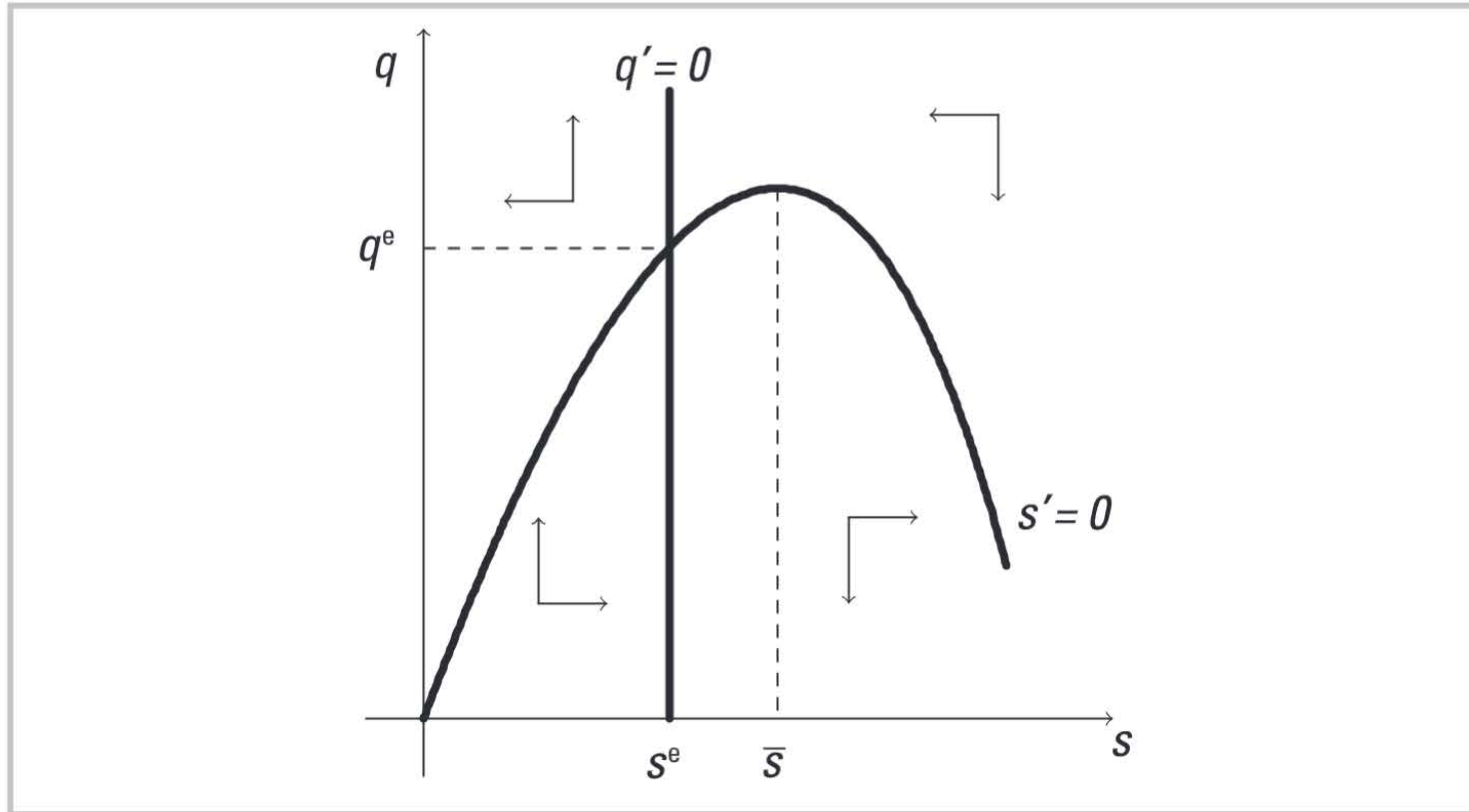
**FIGURE 2.3**

Diagramme des phases : le cas des ressources naturelles renouvelables

épuré, à expliquer comment l'accumulation du capital productif permet de soutenir la croissance du produit national.

À la suite de Solow (1956), prenons le cas où l'agent représentatif (de type ménage-producteur) de l'économie a accès à une technologie (de type Cobb-Douglas), qui transforme le capital $k(t)$ en produit $y(t)$ selon la relation $y(t) = k(t)^\alpha$ où $\alpha \in]0, 1[$. Le capital $k(t)$ s'accumule au rythme de l'investissement productif vu comme le solde de la production $y(t)$ et de la consommation $c(t)$, sachant qu'il se déprécie au taux δ d'obsolescence des techniques. Ainsi, on a

$$k'(t) = k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t) \text{ avec } k(0) = 1 \quad (2.34)$$

L'agent représentatif de l'économie planifie sa trajectoire de consommation $c(t)$ de manière à maximiser son bien-être total W représenté par la valeur présente des flux instantanés de l'utilité de la consommation, soit

$$W = \max_{c(t)} \int_0^\infty e^{-rt} u(c(t)) dt$$

où $u(c) = \ln c$ est l'utilité et $r > 0$ le taux d'escompte.

Toutefois à chaque période t , la consommation ne peut pas dépasser la production de sorte qu'à toute date la contrainte (mixte) doit être vérifiée

$$k(t)^\alpha - c(t) \geq 0$$

D'ores et déjà, on peut noter que cette contrainte est régulière car si elle sature en t , sa dérivée par rapport au contrôle est de $-1 \neq 0$. On peut aussi noter que cette contrainte induit $k(t)^\alpha \geq c(t) \geq 0$ ce qui implique forcément que $k(t) \geq 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) \geq 0$.

Le hamiltonien de ce problème s'écrit $H(t) = e^{-rt} \ln c(t) + \lambda(t)(k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t))$ et le lagrangien généralisé s'écrit $\mathcal{L}(t) = H(t) + \mu(t)(k(t)^\alpha - c(t))$. En appliquant le Principe du maximum, les conditions nécessaires et de transversalité s'écrivent :

$$\mathcal{L}'_{c(t)} = \frac{e^{-rt}}{c(t)} - \lambda(t) - \mu(t) = 0 \quad (2.35)$$

$$\mu(t)\mathcal{L}'_{\mu(t)} = \mu(t)(k(t)^\alpha - c(t)) = 0 \quad (2.36)$$

$$-\mathcal{L}'_{k(t)} = \lambda'(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) = -(\lambda(t) + \mu(t))\alpha k(t)^{\alpha-1} + \lambda(t)\delta \quad (2.37)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \geq 0 \quad (2.38)$$

Ainsi, $c(t) = \frac{e^{-rt}}{\lambda(t) + \mu(t)}$ ce qui interdit que $\lambda(t) = 0$ et $\mu(t) = 0$ simultanément. Supposons alors que la contrainte soit libre en t , ainsi $\mu(t) = 0$ et $\lambda(t) \neq 0$. Donc en différenciant $c(t)$ et égalisant avec (2.37), il vient

$$c'(t) = c(t)(\alpha k(t)^{\alpha-1} - (r + \delta))$$

ce qui avec (2.37) constitue un système différentiel autonome à étudier (en exercice). Son équilibre stationnaire est un point selle conditionnellement stable, tel que $k^e = ((r + \delta)/\alpha)^{-1/(1-\alpha)}$ et $c^e = (k^e)^\alpha - \delta k^e$. Quand l'économie atteint ce point, alors capital et consommation n'évoluent plus. Cette situation survient si l'économie épargne, c'est-à-dire ne consomme pas tout le produit qu'elle génère.

En revanche, si l'économie n'épargne plus en une date t , alors la contrainte vient à être saturée, soit $c(t) = k(t)^\alpha$, et la trajectoire du capital est telle que $k'(t) = -\delta k(t)$. Ainsi, on a $k^s(t) = \kappa e^{-\delta t}$ avec κ une constante, et donc $\lambda(t) + \mu(t) = \kappa e^{(\alpha\delta - r)t}$. Dans (2.37), il vient que $\lambda(t)$ est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 linéaire :

$$\lambda'(t) = \lambda(t)\delta - \alpha\kappa^2 e^{(\delta-r)t}$$

Sa solution est donnée par $\lambda^s(t) = e^{\delta t} [\alpha\kappa^2 e^{-rt} + \Lambda]$ où Λ est une constante, ce qui implique que

$$\mu^s(t) = e^{\delta t} [\alpha\kappa^2 e^{-rt} + \Lambda - \kappa e^{(\alpha\delta - r)t}]$$

Ce multiplicateur reflète alors le coût marginal supporté par cette économie en raison de son souhait de consommer plus qu'elle ne produit. Ce cas de figure n'est jamais réellement envisagé dans les modèles de croissance car il correspondrait à un taux d'actualisation r très faible et donc une forte préférence pour le présent de l'économie.

B. Asymétrie d'information

Les applications traitées jusqu'alors envisageaient le temps comme support de la dynamique des systèmes. Avec asymétrie d'information, et plus précisément sélection adverse, la dynamique est basée sur une variable aléatoire reflétant l'information cachée au sein de la relation principal-agent.

Tarification non linéaire. Reprenons ici le cadre évoqué dans l'application de la partie 1 pour traiter le modèle de Mussa et Rosen (1978), en supposant comme ces auteurs que la disposition marginale à payer (DAP), θ , est distribuée continument selon la loi $g(.) > 0$ sur $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Notons la fonction de répartition $G(.)$. L'offre de l'entreprise au client prend la forme du contrat $\langle q(\hat{\theta}), t(\hat{\theta}) \rangle$ qui propose au client la qualité $q(\hat{\theta})$ moyennant le paiement $t(\hat{\theta})$ si celui-ci prétend avoir une DAP égale à $\hat{\theta}$. L'espérance de profit de l'entreprise est

$$E[\pi] = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} (t(\theta) - c(q(\theta))) g(\theta) d\theta$$

S'il annonce avoir une DAP égale à $\hat{\theta}$, le client, de véritable DAP θ , obtient une utilité :

$$U(\theta, \hat{\theta}) = \theta q(\hat{\theta}) - t(\hat{\theta})$$

La contrainte d'incitation s'écrit donc

$$V(\theta) = U(\theta, \theta) \geq U(\theta, \hat{\theta}), \quad \forall \theta, \hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

Autrement dit, l'utilité du client est maximum s'il annonce sa vraie DAP. La contrainte de participation assure que le client n'est pas forcé à consommer et se note ainsi

$$V(\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

Montrons que ce problème peut être formulé comme un problème de contrôle optimal dans lequel $V(\theta)$ et $q(\theta)$ sont des variables d'état. Pour commencer, centrons-nous sur la contrainte d'incitation. Pour que l'annonce $\hat{\theta}$ assure au client l'utilité maximum quand elle correspond à sa DAP, il est nécessaire que :

$$U'_{\hat{\theta}}(\theta, \theta) = 0 \quad \text{et} \quad U''_{\hat{\theta}\hat{\theta}}(\theta, \theta) \leq 0$$

Par conséquent, la différenciation de $V(\theta)$ et l'application du théorème de l'enveloppe débouchent sur $V'(\theta) = U'_{\theta}(\theta, \theta) = q(\theta)$. Par suite, en différenciant $U'_{\hat{\theta}}(\theta, \theta) = 0$, on trouve $U''_{\theta\hat{\theta}}(\theta, \theta) + U''_{\hat{\theta}\theta}(\theta, \theta) = 0$ soit que $U''_{\theta\hat{\theta}}(\theta, \theta) \geq 0$. Or comme $U'_{\hat{\theta}}(\theta, \theta) = \theta q'(\theta) - t'(\theta)$, $U''_{\theta\hat{\theta}}(\theta, \theta) \geq 0$ équivaut à $q'(\theta) \geq 0$.

Enfin, comme $t(\theta) - c(q(\theta)) = \theta q(\theta) - c(q(\theta)) - V(\theta)$, le profit associé à tout θ décroît avec l'utilité. L'entreprise a donc intérêt à rendre celle-ci la plus faible possible. Comme l'on sait que $V(\theta)$ est croissante, puisque $V'(\theta) = q(\theta) > 0$, il suffit de considérer que $V(\underline{\theta}) \geq 0$ pour assurer la contrainte de participation de chaque DAP.

En conclusion, pour inciter le client, les fonctions d'utilité et de qualité, $V(\theta)$ et $q(\theta)$, sont soumises aux équations de mouvement $V'(\theta) = q(\theta)$ et $q'(\theta) = x(\theta) \geq 0$ où $x(\theta)$ est un contrôle, alors que pour assurer sa participation, l'utilité doit satisfaire la condition aux bornes $V(\underline{\theta}) \geq 0$.

Ainsi, le problème de départ devient :

$$\max E[\pi] = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} (\theta q(\theta) - c(q(\theta)) - V(\theta)) g(\theta) d\theta$$

sous les contraintes $V'(\theta) = q(\theta)$, $q'(\theta) = x(\theta) \geq 0$ et $V(\underline{\theta}) \geq 0$.

Le hamiltonien est :

$$H(\theta) = (\theta q(\theta) - c(q(\theta)) - V(\theta)) g(\theta) + \lambda(\theta) q(\theta) + \mu(\theta) x(\theta)$$

où $\lambda(\theta)$ est la variable adjointe associée à $V(\theta)$ et $\mu(\theta)$ celle à $q(\theta)$. Les conditions nécessaires sont :

$$H'_{x(\theta)}(\theta) = \mu(\theta) \leq 0 \quad (2.39)$$

$$x(\theta) H'_{x(\theta)}(\theta) = x(\theta) \mu(\theta) = 0 \quad (2.40)$$

$$\lambda'(\theta) = -H'_{V(\theta)}(\theta) = g(\theta) \quad (2.41)$$

$$\mu'(\theta) = -H'_{q(\theta)}(\theta) = -((\theta - c'(q(\theta)))g(\theta) + \lambda(\theta)) \quad (2.42)$$

et les conditions de transversalité sont

$$\lambda(\underline{\theta}) \leq 0, \lambda(\underline{\theta}) V(\underline{\theta}) = 0, \lambda(\bar{\theta}) = 0 \quad (2.43)$$

$$\mu(\underline{\theta}) = \mu(\bar{\theta}) = 0 \quad (2.44)$$

Observons pour commencer que de (2.41) et $\lambda(\bar{\theta}) = 0$ dans (2.43), on a

$$\lambda(\theta) = -(1 - G(\theta)) \quad (2.45)$$

On constate ainsi que $\lambda(\underline{\theta}) = -1 < 0$, et donc $V(\underline{\theta}) = 0$. Autrement dit, si le client a la plus petite DAP, il ne perçoit pas une utilité positive. Sinon, il obtient ce que l'on appelle une rente informationnelle destinée à l'inciter à révéler sa vraie DAP, afin d'éviter qu'il ne prétende avoir une DAP plus faible pour obtenir le bien à un meilleur tarif.

Par suite, on peut décomposer la recherche de la qualité optimale en plusieurs étapes.

- Tout d'abord, faisons l'hypothèse de monotonie du taux de hasard (MTH) : $\frac{g(\theta)}{1-G(\theta)}$ monotone croissant en θ . Puis supposons la situation où la contrainte $x(\theta) \geq 0$ est une inégalité stricte pour tout θ . De (2.40), on a $\mu(\theta) = 0$, donc $\mu'(\theta) = 0$. Ainsi, la qualité optimale $q_p(\theta)$ est donnée implicitement par (2.42) et (2.45), soit

$$\theta - \frac{1 - G(\theta)}{g(\theta)} = c'(q_p(\theta))$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites, on vérifie que $x(\theta)$ est bien strictement supérieur à 0. On obtient :

$$x(\theta) = q'_p(\theta) = \frac{\left(\theta - \frac{1-G(\theta)}{g(\theta)} \right)'}{c''(q_p(\theta))} > 0$$

ce qui est vérifiée sous l'hypothèse MTH.

L'interprétation est assez simple. Par rapport à la situation de premier rang pour laquelle l'entreprise observe la DAP du client et lui propose une qualité efficace telle que $\theta = c'(q(\theta))$, la qualité offerte ici est plus basse, excepté si le client a la DAP la plus élevée $\bar{\theta}$. La raison est que cela permet à l'entreprise d'atténuer le caractère coûteux de la rente informationnelle qui croît au taux $q(\theta)$. L'entreprise réalise donc un arbitrage rente-efficacité. De plus, comme $x(\theta) > 0$ implique que la qualité est strictement croissante, l'entreprise propose donc au client un contrat dit séparateur : chaque DAP se voit proposer une qualité et un transfert différent.

• Ensuite, on déduit de ce qui précède que si l'hypothèse MTH est abandonnée, il peut exister des intervalles tels que $\left(\theta - \frac{1-G(\theta)}{g(\theta)} \right)$ n'est pas croissant. La solution précédente n'est donc pas satisfaisante car elle impliquerait $x(\theta) < 0$. Dans ce cas, il faut procéder à une opération de « lissage » visant à déterminer l'intervalle optimal $[\theta_0, \theta_1]$ sur lequel $x(\theta) = 0$. Pour simplifier, supposons que $[\theta_0, \theta_1] \subset [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Cela signifie que de $\underline{\theta}$ à θ_0 et de θ_1 à $\bar{\theta}$, la qualité est égale à $q_p(\theta)$ et $\mu(\theta) = 0$, et que de θ_0 à θ_1 la qualité est égale à une valeur q_D constante (puisque $q'_D(\theta) = x(\theta) = 0$) et $\mu(\theta) < 0$ en vertu de (2.39). Pour déterminer θ_0 , θ_1 et q_D , il faut raisonner par continuité de la variable qualité et de sa variable adjointe. Ainsi, pour la qualité on a

$$q_p(\theta_0) = q_p(\theta_1) = q_D \quad (2.46)$$

tandis que pour la variable adjointe :

$$\mu(\theta_0) = \mu(\theta_1) = 0 \quad (2.47)$$

En se rappelant que $\lambda(\theta) = -(1 - G(\theta))$, on peut donc utiliser les deux conditions aux bornes données par (2.47) pour intégrer (2.42) et trouver

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ((\theta - c'(q_D))g(\theta) - (1 - G(\theta)))d\theta = 0$$

Cette équation combinée à (2.46) compose un système de trois équation à trois inconnues.

L'entreprise est donc dans une situation où elle propose au client un contrat séparateur si $\theta \in [\underline{\theta}, \theta_0]$ ou $[\theta_1, \bar{\theta}]$ et mélangeant sinon, c'est-à-dire, associant une même qualité et un même paiement à plusieurs DAP.

• Enfin, étudions la situation pour laquelle l'entreprise souhaite sélectionner son client en excluant les DAP pas assez profitables. En notant θ^* la DAP seuil, la condition nécessaire suivante s'ajoute aux précédentes :

$$H(\theta^*) = (\theta^* q(\theta^*) - c(q(\theta^*)) - V(\theta^*))g(\theta^*) + \lambda(\theta^*)q(\theta^*) + \mu(\theta^*)x(\theta^*) = 0$$

En raisonnant comme précédemment, on peut montrer que $\lambda(\theta) = -(1 - G(\theta))$ et $V(\theta^*) = 0$. Comme $\mu(\theta^*)x(\theta^*) = 0$, $H(\theta^*) = 0$ devient

$$\theta^* q(\theta^*) - c(q(\theta^*)) = \frac{1 - G(\theta^*)}{g(\theta^*)} q(\theta^*) > 0$$

La DAP seuil optimale est donc telle qu'il existe un écart entre ce qu'est prêt à payer le client, $\theta^* q(\theta^*)$, et ce que ça coûte à l'entreprise, $c(q(\theta^*))$.

Régulation d'un monopole naturel. En s'inspirant de Lewis et Sappington (1989), considérons un monopole naturel opérant avec un coût variable $CV(q) = cq$, où $c \in \mathcal{C} = [0, 1]$ est le coût marginal (son efficacité technique) qu'il est seul à connaître, et q est la production. Son coût fixe est inversement relié à son efficacité de la façon suivante, $CF = K - \frac{1}{2}c^2$. L'idée est que c est un paramètre indexant les technologies disponibles ; celles-ci sont telles qu'un gain d'efficacité à la marge se fait au prix d'un coût fixe plus élevé. Le régulateur de ce secteur n'observe pas c . Néanmoins, il sait que l'efficacité est issue d'une loi uniforme sur \mathcal{C} , de sorte que la fonction de densité est $f(c) = 1$. Il propose au monopole un contrat de régulation $\langle q(\hat{c}), t(\hat{c}) \rangle$ où $q(\hat{c})$ et $t(\hat{c})$ indiquent respectivement le volume de production et la subvention versée au monopole s'il annonce qu'il est d'efficacité \hat{c} . Le profit du monopole est donc, pour une annonce \hat{c} et une efficacité c :

$$\pi(\hat{c}, c) = t(\hat{c}) - cq(\hat{c}) - \left(K - \frac{1}{2}c^2 \right)$$

La contrainte d'incitation à annoncer son vrai type est

$$\Pi(c) = \pi(c, c) \geq \pi(\hat{c}, c), \forall \hat{c}, c \in \mathcal{C}$$

tandis que la contrainte de participation est

$$\Pi(c) \geq 0, \forall c \in \mathcal{C}$$

Le régulateur n'est intéressé que par le surplus du consommateur égal à $\frac{3}{2}q - \frac{1}{2}q^2 - t$. Après substitution, la fonction objectif est :

$$EW = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}q(c) - \frac{1}{2}q(c)^2 - cq(c) - \left(K - \frac{1}{2}c^2 \right) - \Pi(c) \right) dc$$

En se reportant à l'application sur la tarification non linéaire, on peut montrer que le problème est alors de maximiser EW sous les contraintes de participation et d'incitation réécrites sous la forme $\Pi'(c) = -q(c) + c$, $q'(c) = x(c) \leq 0$.

Avant d'entrer dans l'étude des conditions nécessaires, il est utile d'observer que $\Pi''(c) = -q'(c) + 1 > 0$, c'est-à-dire que le profit est une fonction strictement convexe. On en déduit que la contrainte $\Pi(c) \geq 0$ ne peut être saturée qu'en un point, noté c_m . Il s'ensuit que c_m est situé soit sur l'une des bornes 0 ou 1, soit entre les deux. Dans le premier cas, comme la fonction objectif est décroissante avec le profit, il suffit de considérer $\Pi(0)$ ou $\Pi(1)$ égal à 0 pour garantir la contrainte de participation. En revanche, dans le dernier cas, comme il s'agit d'une contrainte pure et que c_m reste à déterminer, il faut envisager la possibilité que la variable adjointe associée fasse un saut en ce point.

Le hamiltonien est :

$$H = \left(\frac{3}{2}q(c) - \frac{1}{2}q(c)^2 - cq(c) - \left(K - \frac{1}{2}c^2 \right) - \Pi(c) \right) - \lambda(c)(q(c) - c) + \mu(c)x(c)$$

où $\lambda(c)$ (resp. $\mu(c)$) est la variable adjointe associée à l'état $\Pi(c)$ (resp. $q(c)$) et $x(c)$ est le contrôle. Le lagrangien généralisé se note :

$$\mathcal{L} = H + \tau(c)\Pi(c)$$

avec $\tau(c)$ le multiplicateur associé à la contrainte de participation. Les conditions nécessaires sont⁶ :

$$\mathcal{L}'_{x(c)} = \mu(c) \geq 0$$

$$x(c) \mathcal{L}'_{x(c)} = \mu(c)x(c) = 0$$

$$\lambda'(c) = -\mathcal{L}'_{\Pi(c)} = 1 - \tau(c)$$

$$\mu'(c) = -\mathcal{L}'_{q(c)} = -\left(\frac{3}{2} - q(c) - c - \lambda(c) \right)$$

$$\text{au point de saturation } c_m : \lambda(c_m^-) - \lambda(c_m^+) = \delta(c_m) > 0$$

Les conditions de transversalité sont :

$$\lambda(0)\Pi(0) = 0, \lambda(0) \leq 0 \quad \text{et} \quad \lambda(1)\Pi(1) = 0, \lambda(1) \geq 0$$

$$\mu(0) = \mu(1) = 0$$

Examinons les trois possibilités évoquées plus-haut pour c_m .

Considérons d'abord que le point de saturation se fasse en $c_m = 0$. En vertu de la convexité de $\Pi(c)$, le profit est donc croissant. On a ainsi $\Pi(0) = 0$, $\Pi'(c) > 0$, $\lambda'(c) = 1$ et $\lambda(1) = 0$. Il s'ensuit que $\lambda(c) = c - 1$. En anticipant que $q'(c) < 0$, et en notant $q_0(c)$ la solution correspondante, il vient que $\mu'(c) = 0$ et ainsi $q_0(c) = \frac{5}{2} - 2c$. On a donc bien $q'_0(c) = -2 < 0$. Il reste à vérifier que $\Pi'(c)$ est positif, soit $-(\frac{5}{2} - 2c) + c > 0 \Leftrightarrow 3c > \frac{5}{2}$.

⁶ Le signe de la première condition est dû à la contrainte de non-négativité du contrôle $x(c)$.

Si cette condition est vérifiée pour $c = 1$, elle ne l'est pas pour $c = 0$. On ne peut donc envisager cette solution que pour les valeurs élevées de c .

Si maintenant on suppose que $c_m = 1$, cela implique $\Pi(1) = 0$, $\Pi'(c) < 0$, $\lambda'(c) = 1$ et $\lambda(0) = 0$ et donc $\lambda(c) = c$. En procédant comme précédemment et en notant $q_1(c)$ la solution, on obtient $q_1(c) = \frac{3}{2} - 2c$, $q_1'(c) = -2 < 0$ et $\Pi'(c) = -(\frac{3}{2} - 2c) + c < 0 \Leftrightarrow 3c < \frac{3}{2}$, ce qui est possible en $c = 0$, mais impossible en $c = 1$. Cette solution n'est envisageable que pour les valeurs faibles de c .

On conclut donc de ces deux hypothèses que c_m est compris entre les bornes. Le profit est d'abord décroissant de 0 à c_m , avec $\lambda(c) = c$, puis croissant de c_m à 1, avec $\lambda(c) = c - 1$. Autrement dit, quand la contrainte sur le profit est saturée, la variable adjointe fait effectivement un saut. On a donc $\delta(c_m) = 1$.

Toutefois, il est aisé de voir que ce saut viole la contrainte $q'(c) \leq 0$ car $q_1(c_m) < q_0(c_m)$. Il faut donc déterminer l'intervalle $]c_0, c_1[$ dans lequel est inclus c_m et sur lequel la production sera constante, soit $q(c) = q_m$.

Le calcul de cet intervalle se fait en trois étapes. Premièrement, par continuité de $q(c)$, on a $q_m = q_1(c_0) = q_0(c_1)$.

Deuxièmement, comme en c_m , $\Pi'(c_m) = 0$, on tire que $q_m = c_m$, ce qui, combiné avec le premier point, donne $c_0 = \frac{\frac{3}{2} - c_m}{2}$ et $c_1 = \frac{\frac{5}{2} - c_m}{2}$.

Troisièmement, on sait que tant que $q(c) = q_i(c)$, $i = 0, 1$, $\mu(c) = 0$. Par continuité de cette variable adjointe en c_0 et c_1 , il vient à l'aide de la dernière condition nécessaire :

$$\int_{c_0}^{c_1} \left(\frac{3}{2} - q_m - c - \lambda(c) \right) dc = 0$$

ce qui, après substitution des valeurs que l'on a déterminées, donne :

$$\int_{\frac{\frac{3}{2} - c_m}{2}}^{c_m} \left(\frac{3}{2} - c_m - 2c \right) dc + \int_{c_m}^{\frac{\frac{5}{2} - c_m}{2}} \left(\frac{5}{2} - c_m - 2c \right) dc = 0$$

Après résolution de cette équation, on trouve que $c_m = \frac{2}{3}$, $c_0 = \frac{5}{12}$ et $c_1 = \frac{11}{12}$. En définitive, la production optimale $q^*(c)$ est :

$$q^*(c) = \begin{cases} \frac{3}{2} - 2c & \text{pour } 0 \leq c \leq \frac{5}{12} \\ \frac{2}{3} & \text{pour } \frac{5}{12} < c < \frac{11}{12} \\ \frac{5}{2} - 2c & \text{pour } \frac{11}{12} < c < 1 \end{cases}$$

L'interprétation est la suivante et se rapproche de celle mise en évidence pour la tarification non linéaire. Pour cela, notons que la quantité produite par le monopole dans une situation de premier rang (sans asymétrie d'information) est :

$$q(c) = \frac{3}{2} - c$$

On a vu que de 0 à c_m , le profit est décroissant. En effet, sur cet intervalle, le monopole a tendance à sous-estimer son efficacité en vue d'espérer une subvention importante couvrant les coûts variables. Pour éviter un tel comportement le régulateur lui assure un profit positif mais avec une production moindre qu'au premier rang (excepté si $c = 0$) afin d'atténuer le caractère coûteux de cette rente. Le phénomène inverse se produit de c_m à 1 et les incitations sont dites contraires. Le monopole souhaite surestimer son efficacité pour que lui soit versée une forte subvention le dédommageant de ses coûts fixes élevés. Le régulateur accepte de lui verser une rente, mais, pour la rendre moins coûteuse, stipule dans le contrat que la production sera plus élevée que celle du premier rang (sauf pour $c = 1$). Enfin, comme cette politique dans le cadre d'un contrat entièrement séparateur entraînerait une violation de la contrainte $q'(c) < 0$, le régulateur propose un contrat partiellement mélangeant pour des efficacités intermédiaires : les mêmes quantités et subventions sont proposées à des efficacités différentes.

C. Interactions

Jeu différentiel et marketing. Dans l'application sur le marketing, l'entreprise pouvait directement contrôler ses dépenses pour ajuster le goodwill étant donné qu'elle était considérée comme isolée de toute concurrence. La plupart du temps, les campagnes publicitaires se font dans un univers concurrentiel où les firmes « combattent » pour conquérir la clientèle. En science de gestion, l'analyse de cette situation revient à considérer ce même problème dynamique mais dans un cadre de décisions multiples et non coopératives de la part des firmes en présence (voir Fershtman, 1984). Ainsi le taux d'érosion de la clientèle d'une firme, considéré comme exogène précédemment, devient justement la conséquence de l'effort de publicité des firmes concurrentes. Ainsi par exemple, si l'on note $y_i(t)$ le goodwill d'une entreprise i alors, la dynamique de sa clientèle devient génériquement :

$$y'_i(t) = G_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad (2.48)$$

pour les $i \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ firmes de l'industrie considérée.

Il est alors naturel de percevoir cette configuration compétitive comme un jeu économique se déroulant dans une perspective structurellement dynamique. On a déjà abordé la question des situations de jeux stratégiques et leurs liens avec l'optimisation statique (voir paragraphe 1.7.3). Ici la situation de jeu est forcément dynamique. En effet, le temps qui s'écoule et surtout l'accumulation du goodwill produit une modification structurelle du jeu, ce qui implique que les paiements, les stratégies, les infor-

mations sont reliés au temps. On nomme ce type de jeu dynamique (en temps continu), jeu différentiel⁷.

Conformément aux notions de trajectoires en boucle ouverte ou en boucle fermée, on peut définir un ensemble de concepts de solutions, d'équilibres, selon que les stratégies sont en boucle ouverte ou fermée (voir paragraphe 2.4.3) ou selon qu'elles sont jouées de manière simultanée ou séquentielle etc. Par exemple, l'utilisation des techniques de contrôle optimal présentées ici produiront une solution du jeu qui sera forcément en boucle ouverte. Ainsi on peut définir un équivalent dynamique de l'équilibre de Nash.

Définition 2.1. *Un équilibre de Nash (en boucle ouverte) du jeu différentiel de marketing est la donnée de stratégies $x_i(t)$ pour lesquelles chaque firme $i \in J$ maximise son profit total actualisé*

$$\Pi_i = \int_0^\infty e^{-rt} [\pi_i y_i(t) - c_i(x_i(t))] dt$$

étant donné la dynamique (2.48) du goodwill de la firme i .

En utilisant le Principe du maximum appliqué simultanément pour les n joueurs, il est alors possible de construire les équilibres de Nash en boucle ouverte du jeu de marketing. Pour illustrer cela, posons $n = 2$ et supposons que les dynamiques du goodwill (2.48) s'écrivent

$$y_1'(t) = x_1(t) - \delta x_2(t) y_1(t)$$

$$y_2'(t) = x_2(t) - \delta x_1(t) y_2(t)$$

Cela exprime l'idée que le taux d'érosion de la clientèle est maintenant fonction de la stratégie publicitaire des concurrents. Ainsi lorsque l'entreprise 1 fait un effort de publicité $x_1(t)$ elle accroît sa notoriété mais érode aussi le goodwill de sa concurrente l'entreprise 2 et inversement.

Les hamiltoniens sont

$$H_i = e^{-rt} [\pi_i y_i(t) - c_i(x_i(t))] + \lambda_i(t) (x_i(t) - \delta x_{-i}(t) y_i(t))$$

où $\lambda_i(t)$ est la variable adjointe au goodwill de i et $x_{-i}(t)$ l'effort de publicité du concurrent de i . Les conditions nécessaires (pour $x_i(t) > 0$) et de transversalité sont $\forall i = 1, 2$:

$$H'_{i x_i(t)} = -e^{-rt} c'(x_i(t)) + \lambda_i(t) = 0 \quad (2.49)$$

$$-H'_{i y_i(t)} = \lambda_i'(t) \Leftrightarrow \lambda_i'(t) = -e^{-rt} \pi_i + \delta \lambda_i(t) x_{-i}(t) \quad (2.50)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) (\hat{y}_i(t) - y_i(t)) \geq 0$$

⁷ Nous ne présentons ici que quelques éléments sur les jeux dynamiques différentiels. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à Dockner et alii (2000).

Ainsi $x_i(t) = (c')^{-1}(e^{rt}\lambda_i(t))$ et la solution revient à résoudre (au moyen d'un diagramme de phase par exemple), le système différentiel en (λ_1, λ_2) :

$$\lambda_1'(t) = -e^{-rt}\pi_1 + \delta\lambda_1(t)[(c')^{-1}(e^{rt}\lambda_2(t))]$$

$$\lambda_2'(t) = -e^{-rt}\pi_2 + \delta\lambda_2(t)[(c')^{-1}(e^{rt}\lambda_1(t))]$$

Par exemple si $\pi_1 = \pi_2 = \pi$, et $c(x) = \frac{1}{2}x^2$ alors le système est symétrique et l'on peut chercher la solution telle que $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ car en effet dans ce cas en différentiant (2.49) en t , on obtient :

$$-re^{-rt}x(t) + e^{-rt}x'(t) = \lambda'(t)$$

et en substituant dans (2.50), il vient

$$\begin{aligned} -re^{-rt}x(t) + e^{-rt}x'(t) &= -e^{-rt}\pi + \delta e^{-rt}x(t)^2 \\ \Rightarrow x'(t) &= \delta x(t)^2 - rx(t) - \pi \end{aligned} \quad (2.51)$$

Cette équation est une équation différentielle d'ordre 1 non linéaire que l'on peut résoudre ou étudier pour caractériser la solution.

Plus simplement, dans le but de comparer avec la situation sans interaction stratégique de l'application précédente, il est aisé de voir que la politique constante du cas « monopolistique », $x^m(t) = \frac{\pi}{r+\delta}$, n'est plus optimale.

Une façon de le démontrer revient à noter que l'équation différentielle du premier ordre non linéaire (2.50) est une équation différentielle de Riccati qu'il est possible de résoudre explicitement (à faire en exercice). Il est aussi possible d'étudier le diagramme des phases de (2.51). La ligne de phase est ici quadratique $f(x) = \delta x^2 - rx - \pi$, et possède un seul zéro positif soit $x_0 = \frac{1}{2\delta} \left(r + \sqrt{4\pi\delta + r^2} \right)$, qui constitue un équilibre stationnaire de $x(t)$ qui est instable car $f'(x_0) = \sqrt{4\pi\delta + r^2} > 0$.

Ainsi pour tout $x^*(0)$, la politique optimale n'est pas constante, soit elle converge vers $x = 0$ soit elle diverge (voir figure 2.4). Elle diffère donc du cas « monopolistique » $x^m = \frac{\pi}{r+\delta}$ et on peut montrer que selon les paramètres (π, r, δ) , $x_0 > (<) x^m$. En effet, par exemple lorsque $r = \delta$, alors $x_0 < x^m$ et les firmes en duopole investissent moins que le monopole, si $\pi \geq r + \sqrt{4\pi r + r^2}$ soit $\pi \geq 6r$ et inversement.

Remarque : L'approche par le contrôle optimal qui est esquissée ici pour résoudre ou analyser la solution n'est valide que si l'on se contente de déterminer un équilibre de Nash en boucle ouverte du jeu. En effet, si l'on cherche un équilibre en boucle fermée alors il est préférable de modéliser le problème de manière à pouvoir appliquer le Principe d'optimalité. De même, si l'on supposait un certain

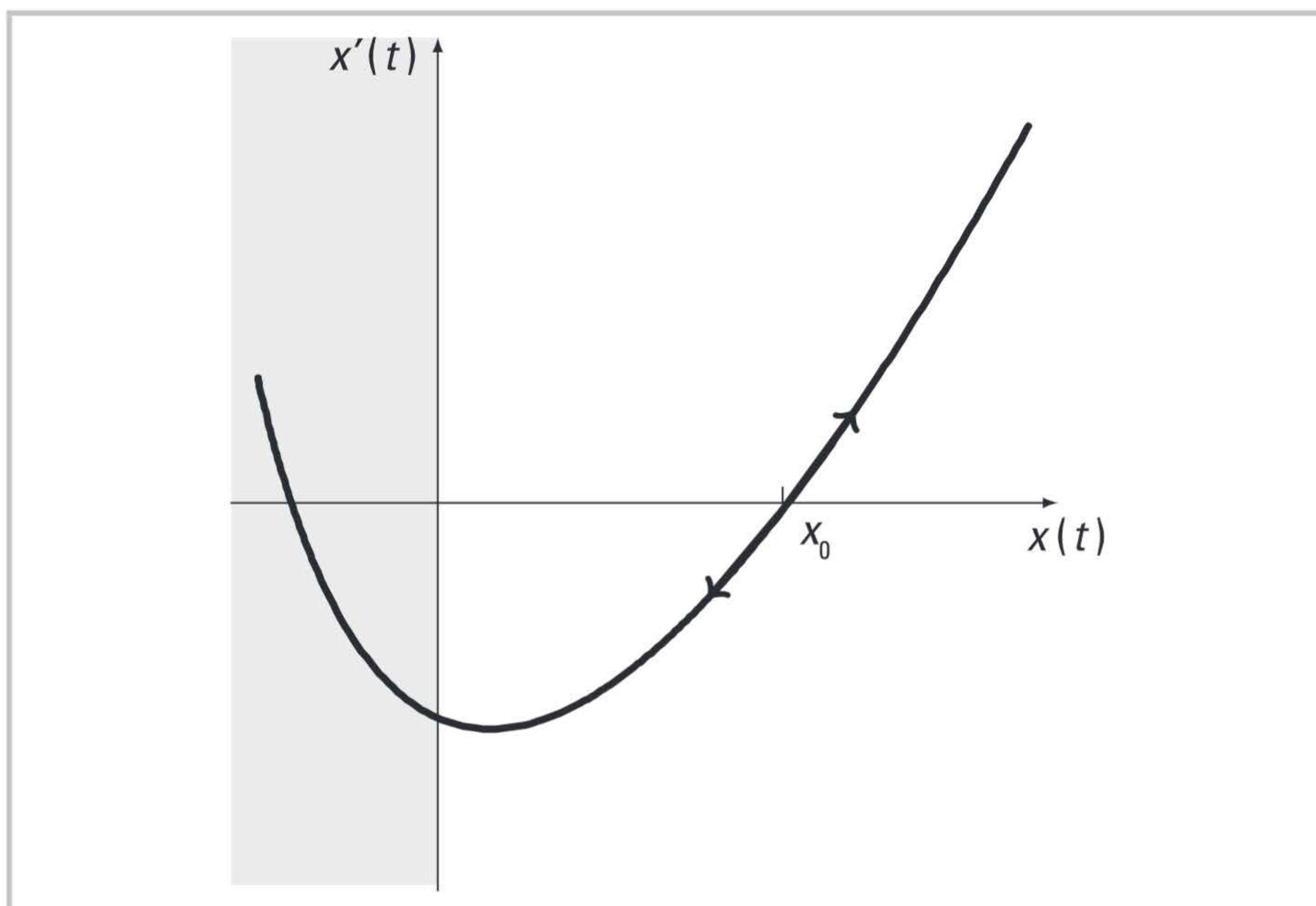
**FIGURE 2.4**

Diagramme des phases : le cas du goodwill

leadership entre les joueurs, alors la détermination d'un équilibre en boucle ouverte pourrait ne pas être la bonne solution car il pourrait (génériquement) souffrir d'un problème dit d'incohérence dynamique. Ce problème provient du fait que lorsque le premier joueur (leader) anticipe la réaction optimale du second joueur (le suiveur), il peut être incité à dévier en une date donnée de la politique déterminée par l'application du contrôle optimal. En termes de théorie des jeux, l'équilibre ainsi déterminé peut ne pas être parfait (en sous-jeux).

2.5.2 Programmation dynamique

Remplacement des équipements. Les équipements productifs se détériorent et la planification de leur renouvellement peut s'avérer importante dans la gestion des entreprises. La programmation dynamique permet de répondre à ce type de problèmes (Helmer, 1970). Pour cela, on doit repérer l'âge d'un matériel $y(t)$ en une date t , ainsi que le coût d'exploitation $C(y(t))$ et la valeur de revente $R(y(t))$ en fonction de cet âge. On supposera ici que la recette d'exploitation est invariante de l'âge du matériel est se situe à $r \text{ €}$. Intuitivement on peut penser que l'allure de la fonction $C(y)$ est croissante avec

l'âge y alors que celle de $R(y)$ est décroissante. De même, il est logique d'imaginer que $R(0) > C(0)$: l'exploitation d'un matériel neuf coûte moins que sa valeur de revente.

La décision du propriétaire/gestionnaire du matériel consiste pour chaque période t à remplacer ou non le matériel par un nouveau. Ainsi la décision est un choix binaire $x(t) \in \{0, 1\}$ qui va gouverner l'évolution de l'âge du matériel selon la dynamique discrète suivante

$$y(t+1) = x(t)y(t) + 1 \quad (2.52)$$

sachant qu'en date $t = 1$ le matériel est neuf donc $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$. Cette décision $x(t)$ est telle que si :

- $x(t) = 1$ alors le matériel est conservé et son exploitation dégage un bénéfice $r - C(y(t))$,
- $x(t) = 0$ alors le matériel est remplacé moyennant une dépense d'investissement $I(t)$. Puisque son âge « devient » maintenant $y(t) = 0$, son exploitation rapporte un bénéfice $r - C(0)$. En revanche, la revente du matériel remplacé, rapporte $R(y(t))$.

Le bénéfice net de la décision de remplacement s'écrit

$$\begin{aligned} B(x(t), y(t)) &= (1 - x(t))(r + R(y(t)) - C(0) - I(t)) + x(t)(r - C(y(t))) \\ &= r + (1 - x(t))(R(y(t)) - C(0) - I(t)) - x(t)C(y(t)) \end{aligned}$$

L'objectif du gestionnaire est de maximiser le bénéfice net actualisé de l'exploitation et du renouvellement de l'équipement jusqu'à l'horizon T , supposé exogène ici, qui correspond à la date de cessation de l'activité productive basée sur ce matériel. Résoudre le problème revient donc à maximiser le bénéfice net actualisé soit :

$$\max \sum_{t=1}^{t=T} \rho^{t-1} B(x(t), y(t)) + \rho^T R(y(T+1))$$

Pour illustrer la résolution pratique de ce problème supposons deux cas de figure.

Cas numérique. Tout d'abord, admettons que la production va s'étaler sur $T = 4$ périodes et que les coûts et valeurs de reventes peuvent être décrits par les données suivantes (en K€).

Âge	Coût	Revente
0	1	18
1	6	14
2	10	11
3	13	8
4	15	6
5	16	5

De plus, la dépense d'investissement est invariante $I(t) = 27$, la recette d'exploitation est de $r = 10$. Pour simplifier posons $\rho = 1$.

Résoudre le problème consiste à chercher la politique de $\{x^*(t)\}_{t=0}^{t=4}$ qui maximise le bénéfice net actualisé et donc à appliquer l'équation récurrente de Bellman de manière récursive.

Partant de l'horizon $T = 4$, alors $V(y(5), 5) = R(y(5))$, cela donne

$$\begin{aligned} V(y(4), 4) &= \max_{x(4) \in \{0,1\}} B(x(4), y(4)) + R(y(5)) \\ &= \max_{x(4) \in \{0,1\}} 10 + (1 - x(4))(R(y(4)) - 28) - x(4)C(y(4)) + R(x(4)y(4) + 1) \end{aligned}$$

Selon la valeur de $y(4)$ dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ alors $x(4) = 0$ ou $x(4) = 1$.

En effet à partir des données du tableau :

- si $y(4) = 1$, alors $V(1, 4) = -4 + 8x(4) + R(x(4) + 1)$ ainsi, si :

$$x(4) = \begin{cases} 0 & \text{alors } V(1, 4) = 10 \\ 1 & \text{alors } V(1, 4) = 15 \end{cases}$$

Donc il est optimal de conserver l'équipement (i.e. : fixer $x^*(4) = 1$) si à la période 4, le matériel n'a qu'un an (i.e. : $y(4) = 1$). La fonction valeur obtenue est alors de $V(1, 4) = 15$,

- si $y(4) = 2$, alors $V(2, 4) = -7 + 7x(4) + R(2x(4) + 1)$, ainsi $x^*(4) = 1$ et $V(2, 4) = 8$,
- si $y(4) = 3$ alors $V(3, 4) = -10 + 7x(4) + R(3x(4) + 1)$, donc $x^*(4) = 0$ et $V(3, 4) = 4$,
- enfin si $y(4) = 4$ alors $V(4, 4) = -12 + 7x(4) + R(4x(4) + 1)$, donc $x^*(4) = 0$ et $V(4, 4) = 2$.

On peut donc récapituler la solution : $x^*(4) = 0$, si $y(4) \in \{3, 4\}$ et $x^*(4) = 1$, si $y(4) \in \{1, 2\}$. Ce qui indique qu'à la période 4, si le matériel a 1 ou 2 ans, il sera conservé, tandis que s'il a 3 ou 4 ans, il sera remplacé.

En remontant à la période $t = 3$, l'équation récurrente de Bellman s'écrit

$$V(y(3), 3) = \max_{x(3) \in \{0,1\}} B(x(3), y(3)) + V(x(3)y(3) + 1, 4)$$

On cherche $x^*(3)$ en raisonnant de façon similaire et l'on obtient :

- si $y(3) = 1$ alors $x^*(3) = 1$ et $V(1, 3) = 12$,
- si $y(3) = 2$ alors $x^*(3) = 0$ et $V(2, 3) = 8$,
- enfin si $y(3) = 3$ alors $x^*(3) = 0$ et $V(3, 3) = 5$.

La solution est donc $x^*(3) = 0$, pour $y(3) \in \{2, 3\}$ et $x^*(3) = 1$, si $y(3) = 1$. On en déduit qu'à la période 3, si le matériel a 2 ou 3 ans, il sera remplacé, tandis que s'il n'a qu'un an, il sera conservé.

À la période $t = 2$, l'équation récurrente de Bellman s'écrit :

$$V(y(2), 2) = \max_{x(2) \in \{0, 1\}} B(x(2), y(2)) + V(x(2), y(2) + 1, 3)$$

De manière similaire, la solution est telle que $x^*(2) = 1$ si $y(2) = 2$; $x^*(2) = 1$ si $y(2) = 1$ et les valeurs sont $V(1, 2) = 5$ et $V(2, 2) = 12$. Ainsi, que le matériel soit âgé de 1 ou 2 ans à la période 2, il sera conservé.

En période initiale ($t = 1$), $y(1) = 1$ par définition et la résolution de l'équation récurrente de Bellman donne une solution : $x^*(1) = 1$, pour une valeur optimale $V(1, 1) = 9$. La fonction valeur annonce que le bénéfice cumulé sur les 4 périodes de production suivies de la période de revente sera de 9.

En résumé, il est maintenant possible de retracer la politique optimale de remplacement en recalculant les trajectoires $(x^*(t), y^*(t))$ soit :

- en $t = 1$, comme $y^*(1) = 1$ alors $x^*(1) = 1$, le matériel est conservé donc $y^*(2) = 2$,
- en $t = 2$, comme $y^*(2) = 2$ alors $x^*(2) = 1$, le matériel est conservé donc $y^*(3) = 3$,
- en $t = 3$, comme $y^*(3) = 3$ alors $x^*(3) = 0$, le matériel est remplacé donc $y^*(4) = 1$,
- en $t = 4$, comme $y^*(4) = 1$ alors $x^*(4) = 1$, le matériel est conservé donc $y^*(5) = 2$.

Pour finir, on vérifie que le bénéfice net total s'élève à 9 (K€) car

$$\sum_{t=1}^{t=4} B(x^*(t), y^*(t)) + 11 = 40 - 6 - 10 - 20 - 6 + 11$$

Remarque : À la période 2, $x^*(2)$ peut aussi être égal à 0 si $y(2) = 2$. On pourra vérifier que cela débouche sur les décisions $y^*(3) = 1$, $x^*(3) = 1$, $y^*(4) = 2$, $x^*(4) = 1$, $y^*(5) = 3$, que le bénéfice net total s'élève aussi à 9 (K€) et qu'il y a donc bien indifférence entre la politique de conservation ou de remplacement du matériel en $t = 2$.

Cas analytique. Supposons à présent que les fonctions de coût et de revente (en fonction de l'âge) s'écrivent $C(y(t)) = 1 + 3y(t)$ et $R(y(t)) = 18 - 3y(t)$. Supposons

toujours que $r = 10$, $\rho = 1$ et $I(y(t)) = 27$. On peut alors recalculer la politique optimale de remplacement dans cette situation sachant qu'à toute date t , l'équation récurrente de Bellman s'écrit

$$V(y(t), t) = \max_{x(t) \in [0,1]} 10 - (1 - x(t))(3y(t) + 10) - x(t)(1 + 3y(t)) + V(y(t+1), t+1)$$

$$\text{avec } y(t+1) = x(t)y(t) + 1$$

Ainsi à toute date $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, la politique de remplacement va obéir à

$$x^*(y(t), t) = 0 : 9 + y(t)V'_{y(t+1)}(1, t+1) < 0$$

$$x^*(y(t), t) = 1 : 9 + y(t)V'_{y(t+1)}(y(t) + 1, t+1) \geq 0$$

Investissement dans l'entreprise. De manière très générale, l'investissement d'une entreprise dépend de l'état de son stock de capital productif, de la productivité de ce capital, de son obsolescence, des prix de vente des biens ou services que cette entreprise met sur le marché et du capital. Examinons comment est gouverné le rythme d'investissement par ces différents paramètres.

Considérons une entreprise qui utilise du capital noté $k(t)$ pour confectionner ses produits, à partir duquel elle peut espérer une production en volume représentée par la fonction $f(k(t))$ où $f(0) = 0$ et $f'(k(t)) > 0$. Le capital s'accumule au rythme de la décision d'investissement $i(t)$ et se déprécie (du fait de l'usure de la technologie, du déclassement des techniques etc.) selon un taux d'obsolescence proportionnel $\delta > 0$. En temps continu, cela revient à écrire l'équation de mouvement du capital de la manière suivante

$$k'(t) = i(t) - \delta k(t) \quad (2.53)$$

La production est vendue sur un marché (concurrentiel) pour lequel le prix de vente s'établit à p €/unité et le coût du capital est représenté par son coût d'acquisition unitaire de π €/unité. À chaque période, l'investissement coûte $C(i(t))$ et la production rapporte $p \times f(k(t))$. La fonction C est convexe et telle que $C(0) = 0$, $C'(i) \geq 0$. Le problème de la firme est donc de déterminer le plan optimal d'investissement, qui compte tenu de l'évolution du capital productif, maximise la somme actualisée (au taux r) de ses profits sur un horizon donné T sachant qu'en cette date le capital productif peut-être revendu au prix unitaire de π €. Le programme de maximisation s'écrit donc

$$\max_{i(t)} \int_0^T e^{-rt} [pf(k(t)) - C(i(t))] dt + e^{-rT} \pi k(T)$$

En outre, on suppose que l'entreprise est nouvelle en date initiale soit $k(0) = 0$. Résoudre le problème consiste donc à chercher la politique $\{i^*(t)\}_{t=0}^{t=T}$ qui maximise le profit net actualisé sous la dynamique (2.53). L'application du Principe d'optimalité consiste à résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman pour $t \in [0, T]$ soit :

$$-V'_t(k(t), t) = \max_{i(t)} e^{-rt} [pf(k(t)) - C(i(t))] + V'_{k(t)}(k(t), t)[i(t) - \delta k(t)] \quad (2.54)$$

où $V(k(t), t) = \int_t^T e^{-rs} [pf(k(s)) - C(i(s))] ds + e^{-rT} \pi k(T)$ sachant que $\forall s \in [t, T]: k'(s) = i(s) - \delta k(s)$.

Afin de proposer une résolution analytique de ce problème supposons que $f(k(t)) = \phi k(t)$ où $\phi > 0$ et $C(i(t)) = \frac{1}{2} i(t)^2$. En considérant la solution intérieure pour l'investissement, il vient à partir de la condition nécessaire du problème de maximisation dans (2.54) :

$$e^{-rt} i(t) = V'_{k(t)}(k(t), t) \Rightarrow i^*(k(t), t) = e^{rt} V'_{k(t)}(k(t), t)$$

L'investissement optimal s'effectue de manière à égaliser la dépense marginale actualisée de celui-ci ($e^{-rt} i(t)$) et la valeur future du capital supplémentaire qu'il permet de former soit $V'_{k(t)}(k(t), t)$. Ainsi l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman devient une équation aux dérivées partielles quadratique que l'on peut résoudre (voir annexe C.3)

$$V'_t(k(t), t) + e^{-rt} p\phi k(t) + \frac{1}{2} e^{rt} (V'_{k(t)}(k(t), t))^2 - \delta V'_{k(t)}(k(t), t) k(t) = 0 \quad (2.55)$$

La recherche de la solution $V(k(t), t)$ de cette équation se fait en conjecturant une fonction quadratique en $k(t)$ du type $V(k(t), t) = \frac{1}{2} A(t) k(t)^2 + B(t) k(t) + C(t)$ où $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ sont des fonctions continues dérivables inconnues. L'équation (2.55) devient après factorisation en $k(t)$:

$$\left[\frac{1}{2} A'(t) - \delta A(t) + \frac{1}{2} e^{rt} A(t)^2 \right] k(t)^2 + [e^{-rt} p\phi + e^{rt} A(t) B(t) + B'(t) - \delta B(t)] k(t) + C'(t) + \frac{1}{2} e^{rt} B(t)^2 = 0 \quad (2.56)$$

En outre comme $V(k(t), T) = e^{-rT} \pi k(t)$ alors forcément $B(T) = e^{-rT} \pi$ et $A(T) = C(T) = 0$. Par identification des termes on peut donc former le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{2} A'(t) - \delta A(t) + \frac{1}{2} e^{rt} A(t)^2 = 0 & A(T) = 0 \\ e^{-rt} p\phi + e^{rt} A(t) B(t) + B'(t) - \delta B(t) = 0 & \text{avec } B(T) = e^{-rT} \pi \\ C'(t) = -\frac{1}{2} e^{rt} B(t)^2 & C(T) = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve $A^*(t) = 0$ puis :

$$B^*(t) = e^{-rt} \frac{p\phi}{r + \delta} - e^{\delta(t-T) - rT} D$$

$$C^*(t) = \frac{-e^{(2\delta+r)t - 2(\delta+r)T} D^2}{2(2\delta+r)} + \frac{p\phi D e^{\delta(t-T) - rT}}{\delta(r + \delta)} + \frac{E e^{-rT}}{2r\delta(2\delta+r)} + \frac{(p\phi)^2 e^{-rt}}{2r(r + \delta)^2}$$

où $D = \frac{p\phi}{r + \delta} - \pi$ et $E = \pi^2 r \delta + 2\pi r p\phi - 2p^2 \phi^2$.

On en déduit que l'investissement optimal est une trajectoire du temps (en boucle ouverte) telle que

$$i^*(t) = e^{rt} B^*(t) = \frac{p\phi}{r+\delta} - e^{(r+\delta)(t-T)} D$$

La trajectoire optimale du capital est alors telle que (2.53) soit vérifiée pour $i^*(t)$. Cela revient à résoudre une équation différentielle d'ordre 1 linéaire (sachant que $k(0) = 0$) dont la solution est

$$k^*(t) = \frac{p\phi(1 - e^{-\delta t})}{(r+\delta)\delta} - \frac{D[e^{(r+\delta)(t-T)} - e^{-[T(r+\delta)+\delta t]}]}{(2\delta+r)}$$

Ainsi, on observe que $i^*(0) = \frac{p\phi}{r+\delta} - De^{-(r+\delta)T} > 0$ et $i^*(T) = \pi$: la dernière unité de capital investie reflète sa valeur de revente π . En étudiant les variations de $i^*(t)$ on peut voir que

$$i^{*'}(t) = -\frac{D}{r+\delta} e^{(r+\delta)(t-T)} \geq 0 \text{ si } D \leq 0$$

Donc lorsque $D < 0$, la firme investit toujours plus à chaque période car la valeur marginale résiduelle du capital terminal (π) est toujours plus élevée que la productivité marginale actualisée du capital sur une durée de vie infinie en incorporant son obsolescence $\left(\frac{p\phi}{r+\delta} = \int_0^\infty e^{-(r+\delta)t} p\phi dt\right)$. En revanche si $D > 0$, l'effort d'investissement décroît et si $D = 0$, l'investissement est constant au niveau $i^\infty = \frac{p\phi}{r+\delta}$.

L'approche de l'investissement des firmes décrite ici est en relation avec la théorie dite du q de Tobin (Tobin, 1969). Celle-ci stipule que la valeur d'une unité supplémentaire de capital de la firme divisée par son coût de remplacement est un ratio noté q qui, lorsqu'il est supérieur à 1, indique que les investissements doivent être déclenchés pour la firme. Dans le contexte de notre problème le ratio q est exactement représenté par $V'_k(k^*(t), t)$.

Remarque : On peut aussi remarquer que si $T \rightarrow \infty$ alors l'investissement reste constant à i^∞ et le capital converge uniformément vers l'équilibre stationnaire $k^\infty = \frac{p\phi}{(r+\delta)\delta}$. En exercice on montrera que cette solution est bien celle du même problème en horizon infini.

Politique de stock (s,S). En général, une politique de gestion des stocks permet de répondre aux deux questions de base concernant le stockage des produits : quand se réapprovisionner et de combien se réapprovisionner ? On identifie les politiques selon le rythme du contrôle de l'information des produits en stock (le type d'inventaire), selon le type de déclenchement de l'approvisionnement (commande par point ou périodique) et selon le mode d'approvisionnement (quantité fixe de com-

mande ou recomplètement du stock). Ainsi, on repère trois grandes classes de politiques de gestion des stocks :

- politique (s, Q) : l'inventaire est permanent, la commande s'effectue en un point (s) c'est-à-dire si la position du stock est inférieure à une quantité prédéterminée s , et enfin la quantité de réapprovisionnement commandée est fixée à Q unités ;
- politique (s, S) : l'inventaire est permanent, la commande s'effectue en un point (s) , et on procède par niveau de recomplètement (S) : la quantité de réapprovisionnement ramène le stock au niveau S (niveau de recomplètement) ;
- politique (R, S) : l'inventaire et la commande sont périodiques (R) et la commande se fait au niveau de recomplètement (S) .

Considérons à la suite de Stokey et alii (1989) un gestionnaire d'un stock de produits qui peut en vendre au plus une unité normalisée à 1 par période à un prix $\pi > 0$. Lorsque le stock contient $y(t)$ unités de produits en date t , il peut donc vendre $\min\{1, y(t)\}$ mais il peut aussi s'approvisionner d'un volume $x(t)$ de nouveaux produits livrables dans la période suivante à un certain coût payable dès maintenant soit

$$C(x(t)) = \begin{cases} cx(t) + k & x(t) > 0 \\ 0 & x(t) = 0 \end{cases} \quad \text{si}$$

où $c, k > 0$. Si son facteur d'actualisation est noté β alors le profit total de la gestion du stock s'écrit

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\pi \min\{1, y(t)\} - C(x(t))] \\ y(t+1) &= y(t) - \min\{1, y(t)\} + x(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

On pose $\beta\pi > c$ sans quoi aucune commande n'est jamais passée. Le problème est donc de déterminer la politique de commande $x(t)$ et de stockage $y(t)$ qui maximise Π . Par application du Principe d'optimalité, on définit la fonction valeur $V(y(t)) = \max \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^\tau [\pi \min\{1, y(\tau)\} - C(x(\tau))]$ sachant $\forall \tau \geq t : y(\tau+1) = y(\tau) - \min\{1, y(\tau)\} + x(\tau)$. L'équation fonctionnelle de Bellman en posant $y(t) = y$ et $y(t+1) = Y$ est

$$V(y) = \max_{x \geq 0} [\pi \min\{1, y\} - C(x) + \beta V(Y)] \quad (2.58)$$

sachant $Y = y - \min\{1, y\} + x$ et donc

$$x = (Y - (y - \min\{1, y\})) \geq 0 \quad (2.59)$$

ce qui induit la contrainte $Y \geq y - \min\{1, y\}$.

Selon que $x = 0$ et $y \geq (<)1$, l'équation (2.58) peut alors se réécrire

$$V(y) = \begin{cases} \pi y + \max \left\{ \beta V(0), \max_{Y>0} [-c(Y) - k + \beta V(Y)] \right\} & 0 \leq y \leq 1 \\ \pi + \max \left\{ \beta V(y-1), \max_{Y>y-1} [-c(Y-y+1) - k + \beta V(Y)] \right\} & \text{si } y > 1 \end{cases} \quad (2.60)$$

En effet, si le stock courant y est insuffisant au sens large pour écouler la vente d'une unité (cf. $0 \leq y \leq 1$), alors pour le gestionnaire, la question consiste à savoir si pour la période suivante, il doit passer la commande qui reconstituera le stock ($x = Y > 0$) ou non ($Y = 0$). Si le stock courant est suffisant pour la vente ($y > 1$) alors le gestionnaire se pose la même question, mais le stock de la période suivante n'est plus potentiellement vide. L'écriture de l'équation fonctionnelle de Bellman est donc définie par morceaux car le coût d'approvisionnement incorpore un coût fixe k qui n'est payé que si la commande est passée c'est-à-dire si $x > 0$.

Nous allons maintenant montrer que la structure de la politique optimale est de type (s, S) à savoir qu'en définissant $p^*(y) = \arg \max_{Y \geq y - \min\{1, y\}} [\beta V(Y) - C(Y - (y - \min\{1, y\}))]$ alors

$$p^*(y) = \begin{cases} S & \text{si } 0 \leq y \leq s \\ y-1 & \text{si } y > s \end{cases} \quad (2.61)$$

où $s \in (1, 2)$.

Pour comprendre la construction de cette politique optimale et de la fonction valeur qui lui correspond, commençons par étudier ce qu'elle induirait comme profits actualisés si elle était menée. Comme les stocks sont initialement vides, alors la première commande consiste à acheter S unités et supporter le coût $C(S)$ puis à vendre l'unité pendant les S périodes suivantes pour une recette actualisée de $\sum_{t=1}^S \beta^t \pi = \pi \beta \frac{1-\beta^S}{1-\beta}$. Le profit actualisé ainsi retiré est $P_S = \pi \beta \frac{1-\beta^S}{1-\beta} - cS - k$. Bien sûr, cette politique n'est possible que si le stock courant le permet c'est-à-dire n'est pas descendu sous le niveau de une unité, ce qui sera le cas (en répétant cette politique) toutes les $S-1$ périodes donc en date $t = S, 2S, \dots$. Ainsi la valeur associée à cette pratique répétée indéfiniment est donc

$$\Pi_S = \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^{\tau S} P_S = P_S (1 + \beta^S + \beta^{2S} + \dots) = -\frac{cS + k}{1 - \beta^S} + \frac{\beta}{1 - \beta} \pi$$

Si on étudie la fonction $J(y) = -\frac{cy+k}{1-\beta^y} + \frac{\beta}{1-\beta} \pi$ pour $y \geq 0$ on montre qu'elle atteint un maximum unique que l'on notera S défini comme la solution⁸ (non algébrique) en y de l'équation :

$$\beta^{-y} = 1 - y \ln \beta - \frac{k}{c} \ln \beta$$

⁸ Précisément, la solution est $S = \frac{1}{B} \left[1 + W \left(-\exp \left(\frac{k}{c} B - 1 \right) \right) - \frac{k}{c} B \right]$ où $B = \ln \beta$ et W est la fonction de Lambert.

D'une manière générale, la fonction valeur qui correspond à cette politique s'écrit

$$V^*(y) = \begin{cases} \pi y + J(S) & 0 \leq y \leq 1 \\ \pi + c(y-1) + J(S) & \text{si } 1 < y \leq s \\ \frac{\pi}{1-\beta} + D\beta^y & y > s \end{cases} \quad (2.62)$$

où D est une constante inconnue. En effet :

- si $y < s$, il y a deux sous-cas :
 1. si $y \in [0, 1]$ cela sous-entend que le gestionnaire n'a pas lancé de commande quand y est passé sous le niveau s , alors le profit courant est $\pi \min\{1, y\} = \pi y$ et le stock de la période est forcément à zéro. Comme évoqué ci-dessus, le profit total actualisé à partir de la période suivante est $J(S)$;
 2. si $y \in [1, s]$ et que le gestionnaire lance la commande, alors le profit courant atteint $\pi + c(y-1)$ car une commande de $S - (y-1)$ unités est passée conformément à (2.59). Par ailleurs, le profit total actualisé à partir de la période suivante demeure égal à $J(S)$;
- si $y > s$, une unité est vendue et aucune commande n'est passée jusqu'à ce que le stock ne passe en dessous de s . Dans ce cas l'équation fonctionnelle de Bellman (2.60) implique que soit vérifiée : $V(y) = \pi + \beta V(y-1)$. Cette équation récurrente d'ordre 1 à coefficients constants a pour solution⁹

$$V^\#(y) = \frac{\pi}{1-\beta} + D\beta^y.$$

Toutefois, comme $s \in (1, 2)$ si $y = s$ alors $y-1 < 1$ et la définition de la fonction valeur, $V^*(s-1) = \pi(s-1) + J(s)$, permet de déterminer s comme le niveau de stock qui rend indifférent entre commander ou non, soit

$$\begin{aligned} \pi + c(s-1) + J(S) &= \pi + \beta V^*(s-1) \\ &= \pi + \beta(\pi(s-1) + J(S)) \\ \Rightarrow s &= 1 + \frac{(1-\beta)J(S)}{\beta\pi - c} \end{aligned}$$

En conséquence, puisqu'il y a indifférence entre commander et ne pas commander en $y = s$, D doit vérifier $V^\#(s) = \pi + \beta\pi(s-1) + \beta J(S)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} D &= \beta^{1-s} \left[\frac{\pi - c}{\beta\pi - c} J(S) - \frac{\pi}{1-\beta} \right] \\ V^\#(y) &= \pi \frac{1 - \beta^{y+1-s}}{1-\beta} + \beta^{y+1-s} \frac{\pi - c}{\beta\pi - c} J(S) \end{aligned}$$

⁹ Voir la remarque de l'annexe C.2 pour sa résolution.

En guise d'exercice on vérifiera que pour tout niveau y et selon la définition par morceaux de $V^*(y)$, l'équation fonctionnelle de Bellman (2.60) est bien satisfaite. Par exemple, si $y > s$ alors on vérifie bien que $V^*(y) = \pi + V^*(y-1)$.

En résumé, la solution du problème est donc une politique de commande $x^*(y)$ telle que

$$x^*(y) = \begin{cases} S & 0 \leq y \leq 1 \\ S - y + 1 & \text{si } 1 < y \leq s \\ 0 & y > s \end{cases}$$

Pour illustrer cette politique, considérons un profit unitaire de $\pi = 15$ €, un taux d'actualisation de 4 % (donc $\beta = \frac{25}{26}$), un coût unitaire de $c = 5$ € et un coût fixe de $k = 30$ € alors $S^* \approx 15,7$ et $s^* \approx 1,56$. Ainsi, en supposant que les unités commandées sont indivisibles en deçà du demi lot ($x \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$), la politique de stockage est

$$x^*(y) = \begin{cases} 15,5 & 0 \leq y \leq 1 \\ 16,5 - y & \text{si } 1 < y \leq 1,5 \\ 0 & y > 1,5 \end{cases}$$

À partir de l'équation de mouvement (2.57), on peut retracer le profil temporel des commandes et du stock à chaque période dans le tableau suivant

Stockage \ Date	0	1	2	3	...	14	15	16	17	18	...
$y^*(t)$	15,5	14,5	13,5	12,5	...	2,5	1,5	15,5	14,5	13,5	...
$x^*(y(t))$	15,5	0	0	0	...	0	15	0	0	0	...

Arbitrage consommation-épargne. Les décisions de consommation des biens et services sont souvent mises en balance avec celle d'épargne. En effet, si l'on consomme une partie de sa richesse aujourd'hui, on se prive forcément du montant des placements financiers qu'elle pourrait rapporter demain. Il s'agit d'un arbitrage intertemporel que la programmation dynamique permet d'analyser en déterminant quels éléments influencent la trajectoire de consommation et donc d'épargne.

Considérons un modèle dit de *cycle de vie* (voir Modigliani et Brumberg, 1954) où un ménage reçoit un salaire de $w(t) = w$ euros par périodes et dispose d'une richesse $y(0) = y_0$ au temps $t = 0$. Aux périodes suivantes ($t \geq 0$), il choisit le montant de sa consommation $c(t)$ et de son épargne (resp. de sa dette) $s(t) = w - c(t)$ sachant qu'il retire une utilité u de sa consommation et qu'il peut prêter (resp. emprunter) au taux espéré sans risque donné $\rho_t = \rho, \forall t$. La richesse suit donc comme équation de mouvement

$$y'(t) = \rho y(t) - c(t) + w(t) \quad (2.63)$$

La consommation peut dépasser le salaire mais pas la richesse de sorte que : $0 \leq c(t) \leq y(t)$.

En supposant que l'agent espère vivre jusqu'en date T et laisse un héritage d'un montant de $y(T)$, le problème est donc

$$\max_{0 \leq c(t) \leq y(t)} \int_0^T e^{-rt} u(c(t)) dt + e^{-rT} u(y(T)) \quad s/c \quad (2.63) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0$$

où r est le taux d'actualisation et $e^{-rT} u(y(T))$ la valeur actualisée qu'il retire de son leg.

Appliquons le Principe d'optimalité en définissant la fonction valeur $V(y, t) = \max \int_t^T e^{-rz} u(c(z)) dz + e^{-rT} u(y(T))$ sachant que $y(t) = y$. L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman s'écrit en gommant le temps t

$$-V'_t(y, t) = \max_{c \in [0, y]} (e^{-rt} u'(c) + V'_y(y, t)(\rho y - c + w)) \quad (2.64)$$

sachant que $V(y, T) = e^{-rT} u(y)$.

Les conditions nécessaires du problème d'optimisation formé par le membre de droite de (2.64) s'écrivent alors

$$e^{-rt} u'(c) = V'_y(y, t) + \lambda$$

$$e^{-rt} u'(0) \leq V'_y(y, t)$$

$$\lambda(y - c) = 0$$

avec λ le multiplicateur.

L'interprétation de la solution réside dans celle de $V'_y(y, t)$ qui représente la valeur marginale actualisée de l'enrichissement de l'agent dû à l'épargne. C'est le gain total actualisé d'un accroissement de la richesse en date t lorsque la richesse est y . Ainsi la consommation doit refléter l'arbitrage entre cette valeur marginale actualisée de la richesse due à l'épargne et la valeur actualisée de l'utilité courante de la consommation. Si en outre la consommation est contrainte par la richesse (soit $c = y$ et donc $\lambda \geq 0$), il faut rajouter ce prix implicite λ à la valeur marginale actualisée de l'épargne.

Pour une résolution explicite du problème, supposons que le ménage soit oisif, $w = 0$ et que la fonction d'utilité soit $u(c) = c^\beta$ où $\beta < 1$. Alors (2.64) s'écrit ici

$$-V'_t(y, t) = e^{-rt} c(y, t)^\beta + V'_y(y, t)(\rho y - c(y, t))$$

où $c(y, t) = (e^{rt} (V'_y(y, t) + \lambda))^{\frac{1}{\beta-1}}$ est issue des conditions nécessaires.

Ainsi lorsque $c(y, t) < y$ alors $\lambda = 0$ et (2.64) devient

$$V'_t(y, t) + V'_y(y, t)\rho y + V'_y(y, t)^{\frac{\beta}{\beta-1}} e^{\frac{rt}{\beta-1}} \left(\beta^{\frac{\beta}{\beta-1}} - \beta^{\frac{1}{\beta-1}} \right) = 0$$

Dans ce cas, étant donné l'utilité et la valeur terminale, on peut tester une fonction valeur du type $V(y, t) = a(t)y^\beta$, ce qui implique

$$y^\beta \left[a'(t) + \beta a(t)\rho - (\beta - 1)e^{\frac{rt}{\beta-1}} a(t)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right] = 0$$

La solution revient à résoudre l'équation différentielle d'ordre 1 non linéaire en $a(t)$ entre crochets (dite de Bernoulli). Pour cela, introduisons la variable $b(t) = a(t)^{\frac{1}{\beta-1}}$ telle que $b'(t) = \frac{1}{\beta-1} a(t)^{\frac{1}{\beta-1}}$ de manière à retomber sur une équation différentielle d'ordre 1 linéaire (que l'on sait résoudre, voir annexe C.2). À partir de la condition à l'horizon $V(y, T) = e^{-rT} y^\beta$ alors $a(T) = e^{-rT}$, et il vient donc

$$a^*(t) = (r - \beta\rho)^{\beta-1} \left[(r - 1 + \beta(1 - \rho))e^{\frac{rT - (T-t)\beta\rho}{\beta-1}} + (1 - \beta)e^{\frac{rt}{\beta-1}} \right]^{1-\beta}$$

La consommation optimale est donc proportionnelle à la richesse soit

$$c^*(y, t) = (e^r \beta a^*(t))^{\frac{1}{\beta-1}} y = \frac{(r - \beta\rho)}{1 - \beta + (r - 1 + \beta(1 - \rho))e^{\frac{(r - \beta\rho)(T-t)}{\beta-1}}} y$$

avec en T , $c^*(y, T) = y$.

Cette solution respecte la contrainte $c(y, t) \leq y$ si $e^{\frac{(r - \beta\rho)(T-t)}{\beta-1}} \geq 1$ soit $\frac{r}{\rho} \leq \beta$. Dans ce cas, on obtient que le ménage épargne une partie de sa richesse si le taux de rendement des actifs ρ est suffisamment important par rapport à son taux d'actualisation r ou encore si sa préférence pour le présent n'est pas trop forte.

Dans le cas contraire, lorsque $\frac{r}{\rho} > \beta$, alors la consommation correspond à la richesse $c^*(y, t) = y$ et la trajectoire de la richesse peut être déterminée via l'équation différentielle d'ordre 1 linéaire formée par (2.63), soit $y'(t) = (\rho - 1)y(t)$ dont la solution est $y^*(t) = y_0 e^{(\rho-1)t}$.

2.6 EXERCICES

Capital humain. Considérons un agent offrant sa force de travail sur un horizon $[0, T]$. À chaque période t , ses revenus $R(t)$ sont le produit :

- du nombre d'heures de travail $h(t) \in [0, \bar{h}]$, où $\bar{h} = 1$ est la durée légale du travail par période ;
- du niveau de son capital humain $k(t) \geq 0$;

- du salaire horaire $w(t)$ normalisé à $w(t) = w = 1, \forall t$.

Soit donc le revenu en t , $R(t) = w(t)h(t)k(t) = h(t)k(t)$.

L'agent peut accumuler du capital humain en se formant (cours, stages, expériences) pendant une fraction $\rho \in]0, 1[$ du nombre d'heures non travaillées, soit $\rho[\bar{h} - h(t)]$. De plus, son capital humain se déprécie (perte de compétences) à un taux $\delta < \rho$. La contrainte de mouvement du capital humain s'écrit alors :

$$k'(t) = \rho[1 - h(t)]k(t) - \delta k(t)$$

Le problème du travailleur est de maximiser la somme actualisée de ses revenus du travail

$$\max \int_0^T e^{-rt} h(t)k(t) dt$$

où $r > 0$ est le taux d'actualisation, sous les contraintes de mouvement et sur le contrôle $0 \leq h(t) \leq 1$. On supposera que le capital humain initial est donné $k(0) = 1$. On notera $\lambda(t)$ la variable adjointe à l'état $k(t)$.

1. Écrivez les conditions nécessaires du Principe du maximum.
2. Pour simplifier posons $r = 0$, $\delta = 1$, $\rho = 2$ et $T = \ln 3$. Montrez (dans l'ordre) que :
 - (a) si $h^*(t) = 0$ alors $\lambda^*(t) \equiv \lambda_0^*(t) = ae^{-t} \geq \frac{1}{2}$; où a est une constante inconnue ;
 - (b) si $h^*(t) = 1$ alors $\lambda^*(t) \equiv \lambda_1^*(t) = 1 + be^t \leq \frac{1}{2}$; où b est une constante inconnue ;
 - (c) $h^*(t) \in]0, 1[$ n'est pas possible ;
 - (d) $h^*(T) = 1$ (via la condition de transversalité) et donc $b^* = -\frac{1}{3}$;
 - (e) il existe une période $\hat{t} = \ln \frac{3}{2}$ telle que $\lambda_1^*(\hat{t}) = \lambda_0^*(\hat{t}) = \frac{1}{2}$ et donc $a^* = \frac{3}{4}$.
 - (f) déduisez de (a)-(e), le plan de travail optimal ainsi que celui du capital humain.
3. Interprétez la valeur de $\lambda^*(t)$ sur $[0, T]$.

Acquisition d'expérience. Une entreprise vend un produit à partir d'une technologie nouvelle. À l'instant t , l'adéquation du produit aux attentes de la clientèle est représentée par un indice d'expérience x . L'expérience permet d'accroître la recette par unité vendue selon la relation $R(x(t))$ croissante, concave en $x(t)$ et $R(0) = 1$. À chaque période, la firme bénéficie d'un apprentissage dans la confection du produit qui accroît son expérience selon la relation $x'(t) = q(t)$, où $q(t)$ est la production au temps t . En date $t = 0$, son expérience est nulle soit $x(0) = 0$.

Le calcul économique de la firme consiste à maximiser la somme actualisée des profits (au taux $r > 0$) sur un horizon donné T . Le problème peut alors s'écrire

$$\begin{cases} \max \int_0^T e^{-rt} (R(x(t))q(t) - \frac{1}{2}q(t)^2) dt \\ x'(t) = q(t), \quad x(0) = 0 \end{cases}$$

où $\frac{1}{2}q(t)^2$ est le coût de production.

1. Donnez les conditions nécessaires du Principe du maximum.
2. Montrez que
 - (a) la variable adjointe au stock d'expérience est décroissante, non négative puis interpréter ;
 - (b) en date $t = T$: $q^*(T) = R(x^*(T))$.
3. Montrez que la trajectoire optimale de la production peut être décrite par l'équation différentielle : $q^*(t) = -r[R(x^*(t)) - q^*(t)]$. À partir de celle-ci et des conditions nécessaires, montrer que la production est forcément croissante dans le temps et interpréter.

Vente aux enchères. Un vendeur veut céder un bien par enchères. Il fait face à n acheteurs. L'acheteur i a une évaluation pour le bien connue de lui seul notée $v \in \mathcal{V} = [\underline{v}, \bar{v}]$. Elle est la réalisation d'une variable aléatoire indépendante, connaissance commune $g(\cdot) > 0$. On note $G(\cdot)$ la fonction de répartition. Une vente aux enchères se définit alors comme

$$\langle \rho(\hat{v}), \tau(\hat{v}) \rangle$$

où $\rho(\hat{v})$ est la probabilité qu'un acheteur annonçant l'évaluation \hat{v} reçoive le bien en échange d'un paiement espéré $\tau(\hat{v})$.

L'utilité d'un acheteur avec une évaluation v et annonçant \hat{v} est donc $u(\hat{v}, v) = \rho(\hat{v})v - \tau(\hat{v})$. La contrainte d'incitation impose : $U(v) = u(v, v) \geq u(\hat{v}, v)$, $\forall v, \hat{v} \in \mathcal{V}$.

La contrainte de participation nécessite : $\forall v \in \mathcal{V}$, $U(v) \geq 0$. La théorie des probabilités montre que si $\rho'(v) \geq 0$, la contrainte de cohérence suivante apparaît :

$$x(v) = \int_v^{\bar{v}} [G(\varepsilon)^{n-1} - \rho(\varepsilon)] g(\varepsilon) d\varepsilon \geq 0$$

En substance, elle dit que la probabilité qu'un acheteur de tout sous-ensemble $\bar{\mathcal{V}}$ de \mathcal{V} gagne, est au plus égale à la probabilité qu'un acheteur au moins fasse parti de ce sous-ensemble.

Le problème du vendeur est alors de maximiser son espérance de revenu : $\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \tau(v) g(v) dv$ sous les 3 contraintes précédentes.

- Montrez en vous aidant de l'application sur la tarification non linéaire que ce problème se reformule comme un problème de contrôle optimal où l'objectif est $\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} (\rho(v)v - U(v))g(v)dv$, les deux premières contraintes sont :

$$U'(v) = \rho(v), \quad \rho'(v) \geq 0 \quad \text{et} \quad U(\underline{v}) \geq 0$$

et la dernière devient :

$$\begin{cases} x(v) \geq 0, x(\bar{v}) = 0 \\ x'(v) = -[G(v)^{n-1} - \rho(v)]g(v) \end{cases}$$

- En ignorant dans un premier temps la contrainte $\rho'(v) \geq 0$, montrez que si l'hypothèse de monotonie du taux de hasard est satisfaite, soit $\left(\frac{g(v)}{1-G(v)}\right)' \geq 0$, alors la probabilité optimale est $\rho(v) = G(v)^{n-1}$ et vérifie par la même $\rho'(v) > 0$. Interprétez.

Externalités de consommation. Soit en date t , une économie dont la consommation d'un bien en quantité $c(t)$, induit une externalité négative (pollution) dont le niveau est mesuré par $p(t)$. La consommation procure une utilité sociale $u(c)$ (avec $u' > 0$, $u'' < 0$ et $\lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) = 0$). Mais chaque unité consommée conduit à des rejets polluants d'un niveau $ac(t)$. À chaque période, la pollution induit une désutilité sociale $v(p(t))$ (avec $v' > 0$, $v'' > 0$ et $v'(0) = 0$) et décline naturellement selon une fonction de résorption $bp(t) + d$, $b, d > 0$. Le planificateur cherche à maximiser sur une période infinie le bien-être social, $\int_0^\infty e^{-rt} [u(c(t)) - v(p(t))] dt$, sous la contrainte de mouvement de la pollution, où r est le taux d'actualisation.

- Indiquez l'équation de mouvement de la pollution. On se donnera $p_0 \geq 0$.
- Écrivez les conditions nécessaires du Principe du maximum et les commenter.
- Montrez que la consommation optimale satisfait $u''(c(t))c'(t) = (b+r)u'(c(t)) - av'(p(t))$ et commenter.
- Cherchez l'unique état d'équilibre stationnaire et discuter de sa stabilité. Discuter des propriétés de la paire optimale $(c^*(t), p^*(t))$ au travers d'un diagramme de phases dans le plan $(c(t), p(t))$.

Publicité (temps discret). Pour lancer un nouveau produit dont la durée de vie est de 4 ans, une entreprise organise une campagne de publicité grâce à laquelle elle espère attirer des clients fidèles. Pour cela, elle dépense $c(u(t)) = \frac{1}{10}u(t)^2$ à chaque période ce qui lui permet d'attirer $u(t) \geq 0$ nouveaux clients captifs. Chaque client rapporte 10 € à l'entreprise à chaque période. Afin de maximiser le profit total sur les 4 ans, l'entreprise doit résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \max_{\{u(t), x(t)\}} \sum_{t=0}^{t=4} 10x(t) - \frac{1}{10}u(t)^2 \\ x(t+1) = x(t) + u(t) \\ x(0) = 0, \forall t, u(t) \geq 0 \end{cases}$$

Trouver la solution par la programmation dynamique.

Remplacement des équipements. À partir du cas analytique de l'application sur le remplacement des équipements étudié dans le cadre de la programmation dynamique, trouvez la politique optimale de remplacement pour un horizon $T = 4$.

Acquisition d'expérience (suite). Le problème est maintenant analysé en temps discret sur une période infinie. On pose $R(x(t)) = 1 + x(t)$ et $\beta = \frac{1}{1+r}$ le facteur d'actualisation, le problème s'écrit

$$\begin{cases} \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(1 + x(t) - \frac{1}{2}q(t) \right) q(t) \\ x(t+1) = x(t) + q(t), x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Écrivez l'équation fonctionnelle de Bellman (on posera $q(t) \geq 0$).
2. Montrez que si $\beta = \frac{1}{10}$, la fonction valeur du problème s'écrit $V^*(x) = \frac{5}{2}(1+x)^2$ et la production optimale $q^*(x) = 3(x+1)$

Gestion de stock. Reprendre l'application sur la gestion de stock traitée avec le contrôle optimal et résolvez le problème associé à l'aide de la programmation dynamique. On remarquera que l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman est (il s'agit d'une minimisation)

$$V'_t(y(t), t) - hy(t) - k + \frac{V'_{y(t)}(y(t), t)^2}{2a} = 0$$

Pour la résoudre, on essaiera comme fonction valeur la forme

$$V(y(t), t) = bt + c + dy(t)t + \frac{e}{t}y(t)^2 + ft^3$$

où les constantes b, c, d, e et f sont à déterminer.

Ressources naturelles renouvelables. Un gouvernement doit gérer une ressource naturelle renouvelable dont le stock est évalué à $s(t) \geq 0$ unités au temps t . Cette ressource se renouvelle à chaque période selon la fonction de reproduction biologique $g(s(t))$, où $g \geq 0$ et $R(0) = 0$. Le prélèvement $c(t)$ est entièrement consommé. Le calcul économique du gouvernement consiste à maximiser la somme actualisée des flux d'uti-

lité de la consommation (selon un facteur $\beta > 0$) sans horizon *a priori* (période infinie). Le problème peut alors s'écrire

$$\begin{cases} \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c(t)) \\ s(t+1) = g(s(t)) - c(t) \\ s_0 = \underline{s} \\ 0 \leq c(t) \leq s(t) \end{cases}$$

1. Écrivez et interprétez les conditions nécessaires du Principe du maximum.
2. Posons $u(c(t)) = c(t)$ et $g(s(t)) = 100 \frac{s(t)}{1+\rho s(t)}$.
 - (a) déterminez l'état stationnaire de cette dynamique de ressource (c^e, s^e) et l'interpréter ;
 - (b) résolvez par la programmation dynamique et comparer à l'état stationnaire, si $\rho = 1$, et $\underline{s} = 50$.

Investissement dans l'entreprise. En reprenant les spécifications de l'application sur l'investissement dans l'entreprise, utilisez la programmation dynamique pour résoudre le problème quand $T \rightarrow \infty$. Montrez que cette solution obéit au Principe de maximum.

ANNEXES

SOMMAIRE

A	Calcul matriciel	164
B	Intégrales et primitives	175
C	Notions sur les équations	179
D	Démonstration des théorèmes	195

Trois précisions doivent être effectuées avant d'entrer dans le détail des annexes. Tout d'abord, elles n'ont pas pour but d'être exhaustives, mais simplement de présenter les éléments essentiels à la compréhension des développements, théorèmes et calculs réalisés dans le cadre de l'optimisation. Ensuite, par souci de simplicité, lorsque les théorèmes contiennent des conditions nécessaires et suffisantes, on ne démontre que les premières. Enfin, le lecteur voulant approfondir le calcul matriciel, les intégrales et primitives, les équations et les théorèmes sur les fonctions et l'optimisation statique peut se reporter à l'ouvrage de Simon et Blume (1997). Quant aux théorèmes sur l'optimisation dynamique, la lecture de Seierstad et Sydsaeter (1987) s'avérera utile.

A CALCUL MATRICIEL

A.1 Présentation

Définition A.1. (Matrice). On appelle matrice à m lignes et n colonnes, $m, n \in \mathbb{N}$, une famille $\{a_{ij}\}$ d'éléments de \mathbb{R} , où $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, représentée par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De façon plus compacte, on désigne par $A(m, n)$ toute matrice comportant m lignes et n colonnes. Le couple (m, n) représente le format de la matrice. La matrice peut être représentée par le symbole A . Les termes $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ constituent la diagonale de la matrice.

Lorsque $m = 1$ (resp. $n = 1$), A devient un vecteur ligne (resp. colonne). Une matrice de format (m, n) est donc composée de m vecteurs lignes ou de n vecteurs colonnes.

Si $m = n = 1$, la matrice devient un scalaire. Si $m = n$, A est une matrice carrée d'ordre n .

Exemple : La matrice suivante est de format $(3, 2)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Elle comprend 3 vecteurs lignes ou 2 vecteurs colonnes.

La matrice suivante

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition A. 2. Soient les définitions suivantes :

- **Transposée d'une matrice** : on appelle matrice transposée de A , la matrice A^T dont la famille d'éléments est $\{a_{ji}\}$.
- **Matrice identité** : la matrice identité est la matrice carrée d'ordre n , notée I , contenant des 1 sur sa diagonale et des 0 partout ailleurs.
- **Matrice symétrique** : une matrice carrée est dite symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$.
- **Vecteur non négatif** : un vecteur \mathbf{v} est non négatif, $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, si tous ses éléments sont non négatifs.
- **Vecteur non nul** : un vecteur \mathbf{v} est non nul, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si au moins un de ses éléments est non nul.

Exemple : La matrice A_1^T est :

$$A_1^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

À l'ordre 2, la matrice identité est :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A_2 n'est pas symétrique puisque $a_{21} = 4 \neq 2 = a_{12}$. En revanche la matrice suivante l'est :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs de la matrice A_1 sont non nuls.

A.2 Opérations sur les matrices

Addition de matrices

Le résultat de l'addition des matrices A et B de format (m, n) , est la matrice de format (m, n) composée des éléments :

$$\{a_{ij} + b_{ij}\}$$

Le terme ij est obtenu en additionner a_{ij} et b_{ij} .

Remarque : On ne peut additionner que des matrices de même format.

Exemple : L'addition $A_2 + A_3$ donne :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire

Le produit de la matrice $A(m, n)$ par le scalaire c est la matrice de format (m, n) composée des éléments :

$$\{ca_{ij}\}$$

Le terme ij est obtenu en multipliant a_{ij} par c .

Exemple : Le produit de A_2 par 3 donne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

Le résultat du produit des matrices $A(m, n)$ et $B(n, p)$ noté AB est la matrice de format (m, p) telle que :

$$AB = \left\{ \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right\}$$

L'élément ij est obtenu en additionnant les produits :

- du 1^{er} terme de la ligne i par le 1^{er} terme de la colonne j ,
- du 2^{ème} terme de la ligne i par le 2^{ème} terme de la colonne j ,
- ...
- et du n -ième terme de la ligne i par le n -ième terme de la colonne j .

Remarque : Le produit de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de A correspond au nombre de lignes de B .

Exemple : Le produit de A_2 par A_3 est égal à :

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Remarque : La multiplication de matrices n'est généralement pas commutative. Le produit de A_3 par A_2 donne :

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

A.3 Grandeurs associées aux matrices

À partir de maintenant, on ne travaille que sur des matrices carrées d'ordre n .

Déterminant

Cette notion nécessite quelques définitions préalables sachant que le déterminant de la matrice A se note $\det(A)$.

Définition A.3 (Sous-matrice). *On appelle A_{ij} la sous-matrice de la matrice A , la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j dans A .*

Exemple : Avec la matrice A_2 , il existe 4 sous-matrices : $A_{2_{11}} = 3$, $A_{2_{12}} = 4$, $A_{2_{21}} = 2$ et $A_{2_{22}} = 1$.

Définition A.4 (Mineur et cofacteur). *Soit A_{ij} la sous-matrice de A . Alors, on appelle :*

- $M_{ij} = \det(A_{ij})$ le mineur associé à l'élément a_{ij}
- $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ le ij -ème cofacteur de A .

Exemple : Pour la matrice A_2 , on obtient 4 mineurs :

$$M_{2_{ij}} = \det(A_{2_{ij}}), \quad i, j = 1, 2$$

et 4 cofacteurs :

$$C_{2_{11}} = 3, C_{2_{12}} = -4, C_{2_{21}} = -2, C_{2_{22}} = 1.$$

Adoptons les notations suivantes :

- C est la matrice des cofacteurs de la matrice A , c'est-à-dire la matrice où chaque élément a_{ij} de A est remplacé par son cofacteur C_{ij} ,
- \mathbf{C}_k représente le vecteur ligne (resp. colonne) associé à la ligne (resp. colonne) $i = k$ (resp. $j = k$) de la matrice des cofacteurs,
- \mathbf{a}_k représente le vecteur ligne (resp. colonne) associé à la ligne (resp. colonne) $i = k$ (resp. $j = k$) de la matrice A .

Définition A.5 (Déterminant d'une matrice). *Le déterminant de la matrice A est le nombre réel :*

$$\det(A) = \mathbf{C}_i \mathbf{a}_i^T \quad (\text{A.1})$$

pour i quelconque entre 1 et n , ou

$$\det(A) = \mathbf{C}_j^T \mathbf{a}_j \quad (\text{A.2})$$

pour j quelconque entre 1 et n .

Ainsi, si la matrice A est d'ordre 1, on a

$$\det(A) = a_{11}$$

d'ordre 2, l'application de (A.1) donne si $i = 1$:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Enfin, pour une matrice d'ordre 3, le déterminant est le nombre (toujours pour $i = 1$)

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Exemple : Le déterminant de la matrice A_2 est, avec $i = 1$ $\det(A_2) = 1 \times 3 - 4 \times 2 = -5$.

Rang

Définissons pour commencer la notion d'indépendance linéaire.

Définition A.6 (Indépendance linéaire). *Un vecteur colonne de format $(n,1)$ est dit linéairement indépendant d'un (ou d'autres) vecteur(s) de même format s'il ne résulte pas d'une combinaison linéaire de ce(s) vecteur(s).*

Exemple : Si on prend la matrice A_2 , les deux vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants. En revanche le vecteur $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est linéairement dépendant des vecteurs $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ puisque $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Définition A.7 (Rang d'une matrice). *On appelle rang de la matrice A , noté $rg(A)$, le nombre maximum de colonnes de A qui sont linéairement indépendantes. La matrice A est dite de rang plein si $rg(A) = n$.*

Exemple : La matrice A_2 est de rang 2.

Trace

Définition A.8 (Trace). *On appelle trace de la matrice carrée A , notée $tr(A)$, la somme de ses termes diagonaux principaux*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Exemple : À l'aide de la matrice A_2 , on a que $tr(A_2) = 1 + 3 = 4$.

A.4 Inversion et diagonalisation

Matrice inverse

Définition A.9. On appelle matrice inverse de la matrice A , la matrice carrée d'ordre n , notée A^{-1} , telle que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Théorème A.1 La matrice A^{-1} est composée des éléments $\{a_{ij}^{-1}\}$ vérifiant :

$$a_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C_{ij}$$

où $\{C_{ij}\}$ est l'élément de la matrice C^T .

Démonstration. Par définition du déterminant de la matrice A , on a $C^T A = \det(A)I$, d'où $I = \frac{1}{\det(A)} C^T A$. Comme $A^{-1}A = I$, on obtient $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$. Par définition, l'élément ij de la matrice transposée des cofacteurs C^T est $\{C_{ji}\}$, on obtient le résultat du théorème. \square

Remarque : La matrice A n'est donc inversible que si son déterminant est non nul.

Exemple : À l'aide de la matrice A_2 , on a $C_2^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Diagonalisation

Dans le cas le plus simple, la diagonalisation d'une matrice A consiste à transformer celle-ci en une matrice qui ne contient que des termes diagonaux appelés *valeurs propres*. Pour cela, on se doit de calculer le *polynôme caractéristique* de la matrice, soit

$$P(c) = \det(A - cI)$$

où le scalaire c est une valeur propre de A s'il correspond à la racine en c de $P(c) = 0$ (on dit alors que la matrice $(A - cI)$ est singulière).

Pour une matrice de format $(2, 2)$ et en se restreignant au cas où les valeurs propres sont des réels (non multiples), alors la matrice diagonale D associée à A s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

On peut démontrer que si le rang de A est égal au nombre de valeurs propres de A , alors A est diagonalisable. Dans ce cas, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = PDP^{-1}$$

La matrice P , dite de *passage*, se construit à partir des vecteurs propres \mathbf{d}_1 et \mathbf{d}_2 associés respectivement à c_1 et c_2 tels que :

$$(A - c_1 I)\mathbf{d}_1 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad (A - c_2 I)\mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$$

Exemple : Le polynôme caractéristique de la matrice A_2 est

$$P(c) = \det(A_2 - cI) = \det \begin{pmatrix} 1-c & 2 \\ 4 & 3-c \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet comme valeurs propres $c_1 = 5$ et $c_2 = -1$ car $P(c) = 0$ donne $c^2 - 4c - 5 = 0$. Comme A_2 qui est de rang 2, a 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. La matrice diagonale D s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres correspondants sont donc tels que :

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{d}_1 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$$

soit

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite, puisque

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

on peut vérifier que $A = PDP^{-1}$.

Remarque. Si les valeurs propres ne sont plus distinctes ou sont complexes, la procédure de diagonalisation ici présentée peut atteindre ses limites.

Deux résultats intéressants pour finir. Si A est diagonalisable :

- le déterminant de A est le produit des valeurs propres $\det(A) = c_1 c_2$;
- la trace de A est la somme des valeurs propres de la matrice A , soit $\text{tr}(A) = c_1 + c_2$.

Exemple : Considérons la matrice A_2 . On a bien que $\det(A_2) = -5 = 5 \times (-1) = c_1 c_2$ et que $\text{tr}(A_2) = 1 + 3 = 4 = 5 - 1 = c_1 + c_2$.

A.5 Formes quadratiques

Signe d'une forme quadratique

- *Présentation*

Définition A.10 (Forme quadratique). Une forme quadratique définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} est une fonction Q ne contenant que des termes du second degré

$$\begin{aligned} Q : (x_1, x_2) \rightarrow Q(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \end{aligned}$$

Signer une forme quadratique équivaut à déterminer les conditions qui font que quel que soit le couple (x_1, x_2) , la fonction Q conserve le même signe. Ces conditions portent en fait sur des matrices.

Écrivons la forme quadratique sous forme matricielle. Notons $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ on a que :

$$Q(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

On peut définir alors la signature d'une matrice symétrique :

Définition A.11 (Signature d'une matrice). Quel que soit le vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, la matrice A est qualifiée de :

- *définie négative (resp. positive) si :*

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0 \text{ (resp. } \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \text{)}$$

- *semi-définie négative (resp. positive) si :*

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0 \text{ (resp. } \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0 \text{)}$$

Ainsi, si la forme quadratique est négative, la matrice A qui lui est associée est définie négative. Donc, arriver à signer la forme quadratique peut-être reliée aux propriétés de la matrice A . Pour cela, on utilise le critère des mineurs principaux.

- *Critère des mineurs*

Définition A.12 (Mineur diagonal principal d'une matrice). Le mineur diagonal principal Δ_k , $k = 1, \dots, n$, est le déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant dans A les $(n - k)$ dernières lignes et les $(n - k)$ dernières colonnes.

Le théorème suivant peut être avancé.

Théorème A.2 (Signature 1 : critère des mineurs). Soit A une matrice symétrique d'ordre 2. Alors A est définie négative (resp. positive) si et seulement si

$$\Delta_1 < 0 \text{ et } \Delta_2 > 0 \text{ (resp. } \Delta_1 > 0 \text{ et } \Delta_2 > 0 \text{)}$$

Démonstration. Puisque la matrice est symétrique notons $a_{12} = a_{21} = a$, on a

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= a_{11}x_1^2 + 2ax_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

Ajoutons et soustrayons $\frac{a^2}{a_{11}}x_2^2$ à cette expression, il vient

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2ax_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \frac{a^2}{a_{11}}x_2^2 - \frac{a^2}{a_{11}}x_2^2 \\ &= a_{11} \left(x_1^2 + \frac{2a}{a_{11}}x_1x_2 + \frac{a^2}{a_{11}^2}x_2^2 \right) + x_2^2 \left(\frac{a_{11}a_{22} - a^2}{a_{11}} \right) \\ &= a_{11} \left(x_1 + \frac{a}{a_{11}}x_2 \right)^2 + x_2^2 \left(\frac{a_{11}a_{22} - a^2}{a_{11}} \right) \\ &= a_{11} \left[\left(x_1 + \frac{a}{a_{11}}x_2 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_{11}} \right)^2 (a_{11}a_{22} - a^2) \right] \end{aligned}$$

Dès lors $Q(x_1, x_2) \geq 0$ si $a_{11} \geq 0$ et $a_{11}a_{22} - a^2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0$. Or $\Delta_1 = a_{11}$ et $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. \square

Exemple : La matrice A_3 possède deux mineurs diagonaux principaux. Si $k=1$, $n-k=1$, ce qui revient à supprimer la dernière ligne et la dernière colonne. On a : $\Delta_{3_1} = \det(3) = 3$. Si $k=2$, $n-k=0$ ce qui revient à ne supprimer aucune ligne ni colonne. Ainsi, $\Delta_{3_2} = \det(A_3)$. Les mineurs principaux de A_3 sont donc $\Delta_{3_1} = 3$ et $\Delta_{3_2} = 5$. La matrice A_3 est définie positive.

Remarque : Le théorème A.2 se généralise aisément au cas où la matrice est d'ordre n . Elle est alors définie négative si tous ses mineurs diagonaux principaux alternent en signe le premier étant négatif. Elle est définie positive s'ils sont tous positifs.

Signe d'une forme quadratique soumise à des contraintes

Définissons les formes linéaires.

Définition A.13 (Forme linéaire). Une forme linéaire définie sur \mathbb{R}^2 est une fonction F à valeurs réelles dans \mathbb{R} formée de la somme de termes du premier degré

$$\begin{aligned} F : (x_1, x_2) &\rightarrow F(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 c_i x_i \\ &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{aligned}$$

Notons $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a $F(x_1, x_2) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$.

Cherchons les conditions qui font que $Q(x_1, x_2) > 0$, étant donnée la contrainte linéaire $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$. Formons la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que la matrice B est obtenue en bordant la matrice A par le vecteur \mathbf{c} . On a le théorème suivant :

Théorème A.3 (Signature 2 : critère des mineurs bordés). *La forme quadratique $Q(x_1, x_2)$ est positive (resp. négative) tout en satisfaisant la contrainte $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$ si et seulement si*

$$\det(B) < 0 \text{ (resp. } > 0 \text{)}$$

Démonstration. Exprimons x_1 en fonction de x_2 selon la contrainte, on obtient $x_1 = -\frac{c_2}{c_1}x_2$. On a $Q(x_1, x_2)$ est égal à

$$\begin{aligned} Q\left(-\frac{c_2}{c_1}x_2, x_2\right) &= a_{11}\left(-\frac{c_2}{c_1}x_2\right)^2 + 2a\left(-\frac{c_2}{c_1}x_2\right)x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \frac{a_{11}c_2^2}{c_1^2}x_2^2 - \frac{2ac_2}{c_1}x_2^2 + a_{22}x_2^2 \\ &= \frac{x_2^2}{c_1^2}(a_{11}c_2^2 - 2ac_1c_2 + a_{22}c_1^2) \end{aligned}$$

Donc $Q(x_1, x_2)$ est positive compte tenu de $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ si $a_{11}c_2^2 - 2ac_1c_2 + a_{22}c_1^2 > 0$. La définition A.5 permet de vérifier que :

$$a_{11}c_2^2 - 2ac_1c_2 + a_{22}c_1^2 = -\det(B) \quad \square$$

Exemple : À partir de la matrice A_3 , cherchons le signe de $Q(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A_3 \mathbf{x}$ sous la contrainte $(2, 1)\mathbf{x} = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{c}^T = (2, 1)$. On a :

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\det(B_3) = 7$. Cette forme quadratique contrainte est donc négative.

Remarque : Il est important de noter que le théorème A.3 ne s'étend pas de façon analogue au cas où la matrice A et les vecteurs \mathbf{c} et \mathbf{x} sont de format $n > 2$.

A.6 Vecteurs et matrices de l'optimisation

Un vecteur sera supposé être un vecteur colonne. Toutefois, par convention, quand il correspondra à l'argument d'une fonction, il sera considéré comme un vecteur ligne. Concernant l'optimisation, on a le vecteur des variables

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et le vecteur des accroissements marginaux des variables

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

Le gradient de la fonction objectif f est

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f'_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

et la matrice hessienne :

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}) \\ f''_{x_2 x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Notons $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ \xi \end{pmatrix}$ le vecteur des paramètres des contraintes et $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g(\mathbf{x}) \\ \gamma(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ le vecteur des fonctions des contraintes. Les contraintes s'écrivent :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{X} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{x}) - X \\ \gamma(\mathbf{x}) - \xi \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}$$

où $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice jacobienne associée aux contraintes est donc :

$$J\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g'_{x_1}(\mathbf{x}) & \gamma'_{x_1}(\mathbf{x}) \\ g'_{x_2}(\mathbf{x}) & \gamma'_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Exemple : En se référant aux spécifications du problème du producteur produisant deux biens, on a

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Le gradient et la matrice hessienne de π_a sont respectivement :

$$\nabla \pi_a(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -q_1 + q_2 + 2 \\ q_1 - 3q_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \pi_a(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, les contraintes étant $q_1 + 2q_2 \leq S$ et $q_1 + q_2 \leq K$, la matrice jacobienne des contraintes est :

$$J\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

B INTÉGRALES ET PRIMITIVES

B.1 Présentation

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Sur la figure B.1, notons $I(a, b)$ l'aire comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de la fonction pour des valeurs de x appartenant à $[a, b]$.

Posons $x_0 = a$ et $x_n = b$. On peut montrer que l'expression

$$I_n(a, b) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

se rapproche de plus en plus de $I(a, b)$ à mesure que le nombre d'intervalles de même ampleur, n , augmente. À la limite, quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire que les intervalles $(x_i - x_{i-1})$ deviennent infinitésimaux (on dit aussi que l'on fait face à un continuum d'intervalle), on finit par obtenir exactement $I(a, b)$. Ce constat permet de définir le concept d'intégrales.

Définition B.1 (Intégrale définie). *L'aire $I(a, b)$ est l'intégrale entre a et b de la fonction $f(x)$. On la note :*

$$\int_a^b f(x) dx \quad (\text{B.1})$$

Par analogie avec l'expression $I_n(a, b)$, le terme dx se substitue à l'intervalle $x_i - x_{i-1}$ lorsqu'il tend vers 0, tandis que l'opérateur intégrale \int remplace le signe somme

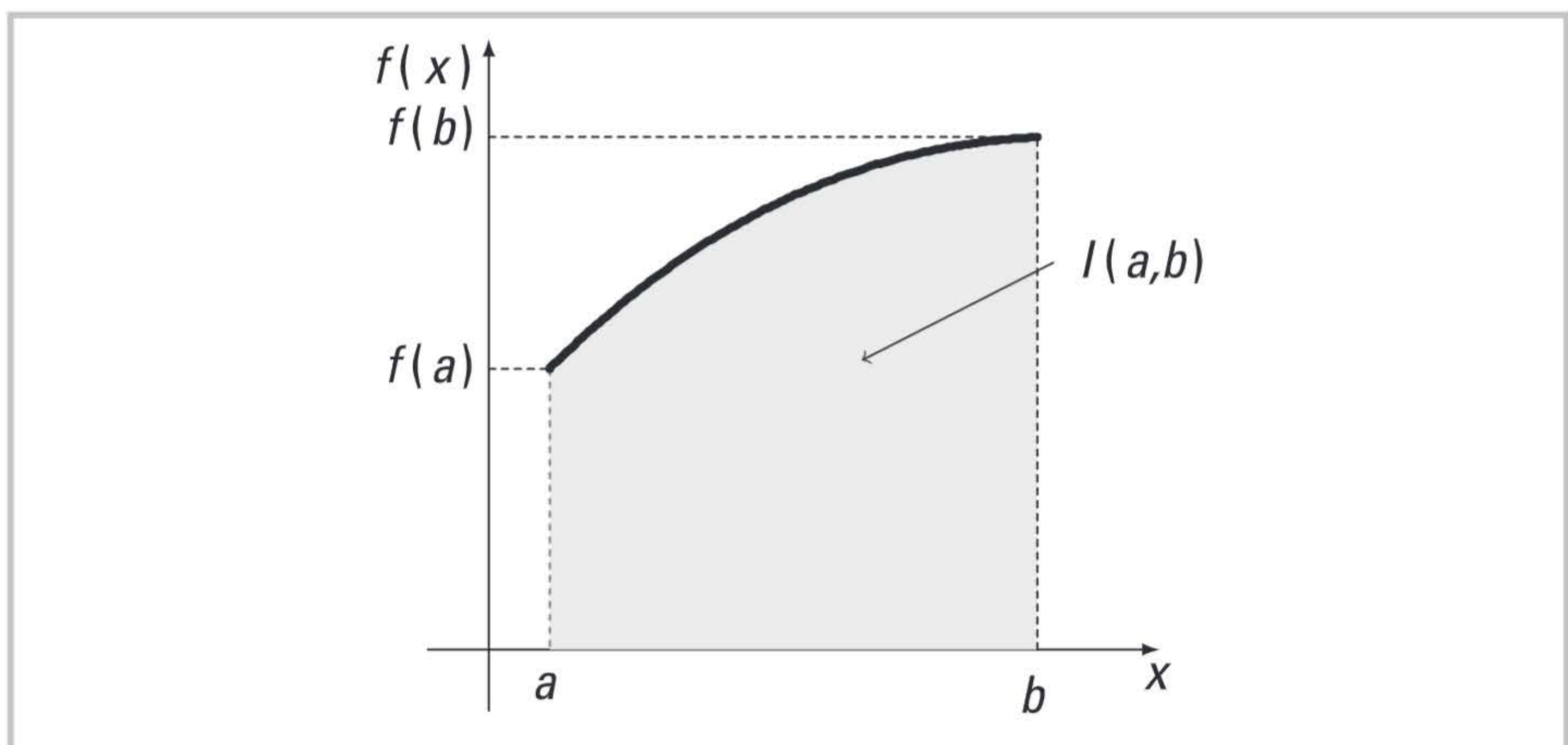


FIGURE B.1
Aire $I(a, b)$

lorsque le nombre d'intervalles tend vers l'infini. Les paramètres a et b sont appelés les bornes inférieure et supérieure de l'intégrale et constituent l'intervalle d'intégration.

Présentons le concept de primitive.

Définition B.2 (Primitive). *La fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ est appelée la primitive de f .*

Faisons le lien entre les notions de primitive et d'intégrale. Le théorème fondamental de l'analyse (que l'on ne démontre pas) indique que les opérations de dérivation et d'intégration, sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, si l'on intègre une fonction continue puis qu'on la dérive, alors on retrouve la fonction initiale.

Une conséquence importante est le théorème suivant :

Théorème B.1 (Intégration 1). *Soit F la primitive de f . Alors :*

$$I(a, b) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (\text{B.2})$$

Le calcul d'une intégrale de la fonction f se fait donc à l'aide de sa primitive F .

Exemple : Soit $f(x) = x$. En représentant cette fonction pour des valeurs de x allant de 1 à 2, on obtient que l'aire située entre le graphe de f et l'axe des abscisses est de $\frac{3}{2}$ (la somme d'un carré et d'une moitié de carré de côtés 1). Or, puisque la primitive de x est $\frac{x^2}{2}$, on a :

$$I(1, 2) = \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Il est fréquent que le calcul d'une intégrale puisse se faire par parties.

Théorème B.2 (Intégration par parties). *L'intégration par parties entre a et b de la fonction $f(x)g'(x)$ est telle que :*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration. Pour le montrer, partons du fait que la dérivée du produit d'une fonction f par une fonction g est :

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Cette égalité est maintenue si on effectue l'intégrale de chaque membre, soit :

$$\int_a^b (f(x)g(x))' dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ce qui, en utilisant le théorème précédent, équivaut à :

$$\left[f(x)g(x) \right]_a^b = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad \square$$

Exemple : Calculons $I = \int_0^2 xe^x dx$. La primitive de xe^x , soit $(x-1)e^x$, présente l'inconvénient de ne pas être immédiatement accessible. Mais en posant $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$, l'intégration par parties donne

$$\int_0^2 xe^x dx = \left[xe^x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx$$

puisque $f'(x) = 1$ et $g(x) = e^x$. En définitive comme la primitive de e^x est e^x , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^x dx &= \left[xe^x \right]_0^2 - \left[e^x \right]_0^2 \\ &= \left[(x-1)e^x \right]_0^2 = e^2 + 1 \end{aligned}$$

B.2 Intégrales et fonctions

Le concept d'intégrale peut être relié aux fonctions de deux façons. Le premier cas concerne les fonctions f dont on ne connaît *a priori* que la dérivée. Par application des équations (B.1) et (B.2), on obtient le théorème :

Théorème B.3 (Intégration 2). Soit la fonction f telle que $f'(x) = g(x)$. Alors, $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt + f(a)$$

où $f(a)$ est appelée la constante d'intégration.

Exemple : Soit la fonction f dont on connaît la dérivée $f'(x) = 2x - 1$ et la valeur en 0, $f(0) = 1$. La fonction f est donc :

$$f(x) = \int_0^x (2t - 1)dt + f(0)$$

Or la primitive de $f'(t)$ est $t^2 - t$ ce qui donne :

$$\int_0^x f'(t)dt = \left[t^2 - t \right]_0^x = x^2 - x$$

Comme $f(0) = 1$, on trouve :

$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

Le second cas renverse la problématique, c'est-à-dire que l'on cherche la dérivée d'une fonction définie à partir d'une intégrale. Dans le cas le plus général, on a :

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(x, t)dt \quad (\text{B.3})$$

La dérivée s'obtient en combinant le théorème B.1 et celui sur la dérivée d'une fonction composée (voir annexe annexe D.1). Elle est présentée dans le théorème suivant :

Théorème B.4 (Règle de Leibniz). *La dérivée de la fonction f définie à partir de (B.3) est :*

$$f'(x) = g(x, b(x))b'(x) - g(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} g'_x(x, t)dt$$

Exemple : Soit $f(x) = \int_0^x 3(x-t)dt$. Le calcul de cette intégrale donne : $f(x) = 3\frac{x^2}{2}$ d'où une dérivée égale à : $f'(x) = 3x$. L'application du théorème B.4 débouche sur

$$f'(x) = 3(x-x) + \int_0^x 3dt = 3x$$

C NOTIONS SUR LES ÉQUATIONS

On distingue les équations algébriques, différentielles et aux dérivées partielles. La différence est que la solution aux premières est un ensemble de nombres, alors que la solution aux deux dernières est un ensemble de fonctions.

C.1 Équation algébrique

On étudie les équations polynomiales d'ordre 2 et les systèmes linéaires d'ordre 2.

Équation polynomiale d'ordre 2

Une équation polynomiale d'ordre 2 de la variable réelle x , est une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b, c sont des scalaires réels.

Les solutions d'une équation polynomiale d'ordre 2 dépendent des valeurs des coefficients a, b, c .

Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif alors il existe deux solutions réelles

$$x^* = \frac{-b \pm 2\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, la racine est réelle et double et vaut $x^* = \frac{-b}{2a}$. Enfin si $\Delta < 0$, alors les racines ne sont pas réelles mais complexes et conjuguées.

Remarque : Pour résoudre des équations polynomiales d'ordre $n > 2$ il n'existe pas toujours de méthode systématique de résolution. C'est aussi le cas en général pour les équations algébriques non linéaires. On peut alors vouloir simplement s'assurer que la ou les solutions existent.

Système d'équations linéaires

On cherche les solutions en x_1 et x_2 de

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

On dispose de plusieurs méthodes pour résoudre ce système. Utilisons celle de Cramer. Pour cela, notons A_k la matrice A au sein de laquelle la colonne k a été remplacée par le vecteur \mathbf{b} . Dès lors, si la matrice A est inversible, on a

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)} C^T \mathbf{b}$$

D'où pour $k = 1, \dots, n$

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} C_k^T \mathbf{b}$$

Par définition, $C_k^T \mathbf{b}$ est le déterminant de la matrice A_k . En définitive, la solution est

$$x_k^* = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

Exemple : La solution du problème du producteur produisant deux biens est :

$$\begin{cases} -q_1^* + q_2^* + 2 = 0 \\ q_1^* - 3q_2^* = 0 \end{cases}$$

Ce qui peut se réécrire comme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on a $\det(A) = 2$, $\det(A_1) = 6$ et $\det(A_2) = 2$, ce qui donne $q_1^* = 3$ et $q_2^* = 1$.

Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit l'équation algébrique non linéaire impliquant une fonction f réelle quelconque de la variable réelle x telle que

$$f(x) = 0 \quad (\text{C.1})$$

S'assurer de l'existence de la solution de cette équation s'effectue en invoquant le théorème des valeurs intermédiaires (non démontré).

Théorème C.1. Soit une $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.

Dans le cadre de l'équation C.1, il suffit de poser $y = 0$ et de s'assurer que 1°) f est bien une fonction continue et 2°) que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$ ou bien $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$.

Remarque : Si l'on suppose que $f(x) = g(x) - x$ et si $g(x)$ est continue alors le théorème C.1 devient le *théorème de point fixe de Brouwer*.

C.2 Équation différentielle (ED)

On étudie les équations différentielles d'ordre 1 (ED1), les systèmes d'équations différentielles d'ordre 1 (SED1) et l'équivalence entre une équation différentielle d'ordre 2 (ED2) et un SED1.

Présentation

Une ED est une équation impliquant une fonction inconnue, ses dérivées, sa variable dont la solution est la fonction en question. On appelle l'ordre k de l'ED, l'ordre de la k -ième dérivée la plus haute qui entre en jeu. Pour la variable $t \in \mathbb{R}$ et une fonction à 4 variables $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, alors l'ED2 en $f(t)$ s'écrit sous sa forme implicite

$$\Phi(f(t), f'(t), f''(t), t) = 0 \quad (\text{C.2})$$

où $f(t)$ est la fonction solution. La plupart du temps, on associe aussi des conditions dites initiales ou aux bornes (ou encore de Cauchy) qui indiquent par quelles valeurs $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, la fonction solution de (C.2) doit passer (par exemple, $f(t_0) = y_0$; $f'(t_0) = y_1$ ou encore $f(t_0) = y_0$ et $f(t_1) = y_1$).

Si cela est possible, l'ED est écrite sous sa forme résolue en $f''(t)$, soit

$$f''(t) = \phi(f(t), f'(t), t)$$

où : $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ou bien en $f'(t)$ si elle est d'ordre 1

$$f'(t) = \phi(f(t), t)$$

avec ici $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

La solution de (C.2) est la fonction continue $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle $f^*(t)$ et ses dérivées obéissent à (C.2) étant données les conditions initiales. Notons que l'existence d'une solution d'une équation différentielle est garantie si ϕ est une fonction continue. L'unicité de la solution exige en plus que les dérivées de ϕ par rapport à f , f' et t existent.

Exemple : Soit l'équation différentielle $f'(t) = tf(t) + t$ avec $f(0) = 1$. L'ordre est $k = 1$, la fonction ϕ est telle que $\phi : (y, t) \mapsto ty + t$. La fonction réelle $f^*(t) = 2 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) - 1$ est une solution car $f^{*'}(t) = 2t \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ et $tf^*(t) + t = 2t \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

ED1

On n'étudie que les ED1 linéaires et le cas séparable des ED1 non linéaires.

• ED1 linéaire

Soit l'ED1 linéaire

$$f'(t) = a(t) f(t) + b(t) \text{ avec } f(t_0) = y_0 \quad (\text{C.3})$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues et dérivables et non nulle. Pour déterminer la solution de (C.3), il est possible de procéder de manière méthodique. Tout d'abord considérons l'équation *homogène* issue de (C.3) c'est-à-dire pour laquelle les termes indépendants de la fonction f sont ignorés, soit

$$f'(t) = a(t) f(t) \quad (\text{C.4})$$

Passer par cette forme homogène de l'ED (C.3) et la résoudre est utile car trouver sa solution, notée $f_h(t)$, et posséder une solution quelconque dite *particulière* de (C.3), notée $f_p(t)$, implique que la fonction $f_h(t) + f_p(t)$ est aussi solution de (C.3). En effet en substituant dans (C.3), il vient :

$$\begin{aligned} f_h'(t) + f_p'(t) &= a(t)f_h(t) + a(t)f_p(t) + b(t) \\ \Rightarrow 0 &= \underbrace{[f_h'(t) - a(t)f_h(t)]}_{=0} + \underbrace{[f_p'(t) - a(t)f_p(t) - b(t)]}_{=0} \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai.

Cherchons donc à résoudre (C.4), pour cela on voit que l'on peut faire apparaître la dérivée logarithmique en $\frac{f'(t)}{f(t)} = (\ln f(t))'$ tant que $f(t) \neq 0$. Ainsi

$$(\ln f(t))' = a(t)$$

ce qui par intégration membre à membre implique

$$\ln f(t) = A(t) + c$$

où $A(t) = \int a(t)dt$. Par la suite, on peut obtenir la solution $f_h(t)$ de l'équation homogène associée à (C.3) en prenant l'exponentielle membre à membre de l'équation précédente soit

$$f_h^*(t) = C \exp(A(t))$$

avec $C = \exp(c)$.

Cherchons désormais, la solution particulière $f_p(t)$ pour (C.3), en utilisant une méthode attribuée à Lagrange dite de *variation de la constante*. Il suffit de construire $f_p(t)$ à partir de la solution $f_h(t)$ mais en supposant maintenant que la constante d'intégration C est une fonction de t , $C(t)$, qu'il faut déterminer. Soit donc $f_h(t) = C(t) \exp(A(t))$, en substituant dans (C.3), il vient

$$\begin{aligned} f_h'(t) &= a(t)f_h(t) + b(t) \\ C'(t)\exp(A(t)) + a(t)C(t)\exp(A(t)) &= a(t)C(t)\exp(A(t)) + b(t) \end{aligned}$$

En simplifiant, il vient

$$C'(t)\exp(A(t)) = b(t) \Rightarrow C'(t) = \frac{b(t)}{\exp(A(t))}$$

et en intégrant on trouve $C(t)$ soit :

$$C^*(t) = \int b(t)\exp(-A(t))dt + k$$

Ainsi en remplaçant $C^*(t)$ dans la solution particulière et en y ajoutant la solution $f_h^*(t)$ on obtient la solution de (C.3) soit

$$f^*(t) = \exp(A(t)) (K + B(t))$$

où $B(t) = \int b(t) \exp(-A(t)) dt$ et $K = C + k$ est la constante inconnue d'intégration qui peut être levée à partir de la condition initiale $f(t_0) = y_0$ en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} f^*(t_0) &= y_0 = \exp(A(t_0)) [K + B(t_0)] \\ \Rightarrow K^* &= y_0 \exp(-A(t_0)) - B(t_0) \end{aligned}$$

Remarque. L'approche de résolution ici développée pour une ED1 est valable si l'équation à résoudre est basée sur du temps discret ($t \in \mathbb{Z}$), à savoir une équation récurrente d'ordre 1 du type $f(t+1) = a(t)f(t) + b(t)$ avec $f(t_0) = y_0$. Dans le cas particulier où les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ sont constants non nuls, une solution explicite de cette équation récurrente est alors donnée par $f^*(t) = a^{(t-t_0)} \left(y_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$ et $f^*(t) = y_0 + b(t - t_0)$ si $a = 1$.

Exemple : Soit l'ED1, $f'(t) = 3f(t) + t$ avec $f(0) = 0$. Ici $A(t) = 3t$ et donc $f_h(t) = C \exp(3t)$. Alors $C^*(t) = \int t \exp(-3t) dt + k$ et une intégration par parties (voir annexe B) permet de conclure que $C^*(t) = -\frac{t}{3} \exp(-3t) + \frac{1}{3} \int \exp(-3t) dt$ soit $C^*(t) = -\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right) \exp(-3t)$. Ainsi, $f^*(t) = \exp(3t)K - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$, donc $K^* = \frac{1}{9}$ et la solution complète s'écrit $f^*(t) = \frac{1}{9}(\exp(3t) - 1) - \frac{t}{3}$.

• ED1 non linéaire séparable

Soit l'ED1 non linéaire

$$f'(t) = a(t) g(f(t)) \text{ avec } f(t_0) = y_0 \quad (\text{C.5})$$

où $a(t)$ et $g(x)$ sont des fonction continues, dérivables et non nulles. Pour résoudre, on peut « séparer » les variables f et t à savoir isoler dans le membre de gauche de l'équation les termes en f et ceux en t dans celui de droite de façon qu'en intégrant on ait :

$$\frac{f'(t)}{g(f(t))} = a(t) \Rightarrow G(f) \equiv \int \frac{df}{g(f)} = \int a(t) dt \equiv A(t)$$

Ainsi lorsque la forme de g est suffisamment simple, on peut résoudre l'équation $G(f) = A(t)$ en f .

Exemple : On définit l'élasticité de la demande $q(p)$ d'un bien par $\varepsilon(p) = -\frac{q'(p)p}{q(p)}$. Pour trouver $q(p)$ à partir de $\varepsilon(p) \equiv \varepsilon > 0$ (ce cas est dit isoélastique), on peut identifier une ED1 séparable dans la définition de l'élasticité :

$$\frac{q'(p)}{q(p)} = -\frac{\varepsilon}{p} \Leftrightarrow \frac{dq}{q} = -\varepsilon \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln q = -\varepsilon \ln(p) + k : q^*(p) = e^k p^{-\varepsilon}$$

SED1

Un système d'équations différentielles est un ensemble d'équations différentielles interdépendantes. Prenons comme exemple de travail, le cas à deux variables qui, au premier ordre, s'écrit

$$\begin{cases} f_1'(t) = \phi_1(f_1(t), f_2(t), t) \\ f_2'(t) = \phi_2(f_1(t), f_2(t), t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_1(t_0) = y_0 \\ f_2(t_0) = z_0 \end{cases}$$

où les fonctions $\phi_i(f_1(t), f_2(t), t)$ sont continues et dérivables.

Si le système est linéaire, une caractérisation complète de la solution est possible à l'aide de l'algèbre linéaire. Sinon, une résolution analytique est souvent fastidieuse voire impossible à mener. Une étude qualitative de la solution peut être conduite au travers de l'analyse du diagramme des phases du système.

• Lien entre les ED2 (ou d'ordres supérieurs) et les SED1

Un premier intérêt de l'étude des SED1 est qu'ils permettent l'analyse des solutions d'équations différentielles dont l'ordre est supérieur à 1. Considérons une ED2 (associé à certaines conditions initiales)

$$f''(t) = \phi(f'(t), f(t), t)$$

Les méthodes présentées dans l'étude des ED1 ne sont pas opérationnelles. En revanche, un changement de variable conduit cette ED2 à s'écrire comme un SED1. En effet, définissons $f_1(t) = f'(t)$ et $f_2(t) = f(t)$ alors, on a $f''(t) = f_1'(t)$ et $f'(t) = f_2'(t)$ ce qui permet d'écrire le SED1 suivant

$$\begin{cases} f_1'(t) = \phi(f_1(t), f_2(t), t) \\ f_2'(t) = f_1(t) \end{cases}$$

dont résolution donnera la solution de l'ED2 initiale.

• SED1 linéaires autonomes

Solution. Dans le cas linéaire et autonome (c'est-à-dire où les coefficients sont constants), le SED1 s'écrit

$$\begin{cases} f_1'(t) = a_{11}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + b_1 \\ f_2'(t) = a_{21}f_1(t) + a_{22}f_2(t) + b_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_1(t_0) = y_0 \\ f_2(t_0) = z_0 \end{cases}$$

ou sous sa forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{f}'(t) = A\mathbf{f}(t) + \mathbf{b} \quad (\text{C.6})$$

étant donné $\mathbf{f}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. À nouveau, on peut utiliser le fait que la somme d'une solution du système homogène associé à (C.6) et une solution particulière fournissent toujours une solution à (C.6).

Dans le cas autonome, la solution particulière est simple à déterminer car elle correspond à l'équilibre stationnaire \mathbf{f}^e de $\mathbf{f}(t)$ pour lequel $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{0}$, soit

$$\mathbf{0} = A\mathbf{f}^e(t) + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{f}^e = -A^{-1}\mathbf{b}$$

Considérons maintenant le système homogène associé à (C.6) soit

$$\mathbf{f}'(t) = A\mathbf{f}(t) \quad (\text{C.7})$$

Comme dans le cas d'une ED1 ordinaire, la solution¹ de ce SED1 va impliquer des fonctions exponentielles du type $\exp(ct)$ où c est un réel inconnu. Supposons en effet que la solution de (C.7) soit $\mathbf{f}_h(t) = \mathbf{d} \exp(ct)$ où \mathbf{d} est un vecteur constant non nul. Alors $\mathbf{f}'_h(t) = c\mathbf{d} \exp(ct)$ et en substituant dans (C.7) on a :

$$\begin{aligned} c\mathbf{d} \exp(ct) &= A\mathbf{d} \exp(ct) \\ \Rightarrow c\mathbf{d} &= A\mathbf{d} \Leftrightarrow [A - cI]\mathbf{d} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Pour que ce système ait une autre solution que $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, il faut que la matrice $A - cI$ soit singulière c'est-à-dire que $\det(A - cI) = 0$. On retrouve alors le problème du calcul des valeurs propres et des vecteurs propres abordé dans l'annexe A.

L'équation caractéristique s'écrit

$$\det(A - cI) = 0 \Leftrightarrow c^2 - (a_{11} + a_{22})c + \det(A) = 0 \quad (\text{C.8})$$

Les valeurs propres de A sont les solutions en c de (C.8), soit :

$$c_1 = -\frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad c_2 = -\frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

où $\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4\det(A)$. En se limitant aux valeurs propres réelles, la matrice diagonale D est

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage $P = (\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2)$ est définie à partir des vecteurs propres \mathbf{d}_1 et \mathbf{d}_2 respectivement associés à c_1 et c_2 tels que :

$$(A - c_1 I)\mathbf{d}_1 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad (A - c_2 I)\mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$$

Dans ce cas, on peut définir une nouvelle variable $\mathbf{g}(t)$ telle que $\mathbf{f}(t) = P\mathbf{g}(t)$ et donc $\mathbf{f}'(t) = P\mathbf{g}'(t)$. Le système (C.7) devient alors

$$\begin{aligned} P\mathbf{g}'(t) &= AP\mathbf{g}(t) \Leftrightarrow \mathbf{g}'(t) = P^{-1}AP\mathbf{g}(t) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{g}'(t) = D\mathbf{g}(t) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

¹ Un moyen plus direct de résoudre le système homogène serait de déterminer la matrice exponentielle de A soit $\exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$.

Ainsi trouver la solution homogène du système (C.7) est équivalent à déterminer celle du système (C.9) qui s'écrit comme deux ED1 indépendantes que l'on sait donc résoudre

$$\begin{cases} g_1'(t) = c_1 g_1(t) \\ g_2'(t) = c_2 g_2(t) \end{cases}$$

Enfin, une fois déterminée $\mathbf{g}^*(t)$, il suffit d'appliquer $\mathbf{f}_h(t) = P\mathbf{g}^*(t)$ pour déterminer la solution de l'équation homogène.

Remarque : La procédure que l'on vient d'exposer n'est pas aussi générale qu'il y paraît. En effet, si la matrice A n'est pas diagonalisable ou si les valeurs propres sont doubles ou complexes, il convient de construire différemment soit D , soit P .

Exemple : Soit le système (homogène) dont l'équilibre stationnaire est $\mathbf{f}^e = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a vu que les valeurs propres sont $c_1 = 5$ et $c_2 = -1$ et que les matrices D et P associées à ces valeurs propres sont

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi en définissant la nouvelle variable $\mathbf{g}(t)$ telle que $\mathbf{f}(t) = P\mathbf{g}(t)$ on a

$$\begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} g_1'(t) = 5g_1(t) \\ g_2'(t) = -g_2(t) \end{cases}$$

Les deux ED indépendantes se résolvent alors simplement :

$$\begin{cases} g_1^*(t) = K \exp(5t) \\ g_2^*(t) = J \exp(-t) \end{cases}$$

Ensuite, il suffit de revenir à la variable $\mathbf{f}(t)$ avec $\mathbf{f}^*(t) = P\mathbf{g}^*(t)$ soit

$$\mathbf{f}^*(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \exp(5t) \\ J \exp(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} K \exp(5t) - J \exp(-t) \\ K \exp(5t) + J \exp(-t) \end{pmatrix}$$

Enfin, les inconnues (K, J) sont levées si l'on pose $\mathbf{f}^*(0) = (1, 1)^T$ soit

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} K - J \\ K + J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} K^* \\ J^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Stabilité de l'équilibre stationnaire. Au delà de la recherche explicite de la solution, l'étude de la matrice D des valeurs propres donne des indications sur le comportement asymptotique de la solution et sur la stabilité de l'équilibre stationnaire \mathbf{f}^e . Tout d'abord, qu'entend-on par stabilité asymptotique de l'équilibre² : si la solution \mathbf{f}^* du système (C.6) converge vers \mathbf{f}^e lorsque t tend vers l'infini alors \mathbf{f}^e est stable. Bien sûr, cette notion de stabilité peut dépendre des conditions initiales $\mathbf{f}(t_0)$: si la stabilité est assurée pour toutes les valeurs de $\mathbf{f}(t_0)$ alors \mathbf{f}^e est globalement stable sinon il n'est stable que localement (dans un certain ensemble de valeurs de $\mathbf{f}(t_0)$).

Les diverses formes de la matrice qualifient la stabilité de l'équilibre \mathbf{f}^e de la manière suivante :

Valeurs propres réelles	D	Type d'équilibre	Stabilité	Instabilité
$c_1 = c_2$	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$	Nœud propre	$c < 0$	$c > 0$
$c_1 c_2 > 0$	$\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$	Nœud impropre	$c_1 < 0$ et $c_2 < 0$	$c_1 > 0$ et $c_2 > 0$
$c_1 c_2 < 0$	$\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$	Point-selle	Conditionnelle	—

Ce tableau permet de faire apparaître des résultats importants sur la stabilité de l'équilibre stationnaire dans le cas des systèmes linéaires :

1. L'équilibre \mathbf{f}^e est *globalement stable* si et seulement si les valeurs propres sont négatives, c'est-à-dire si $\det(A) = c_1 c_2 > 0$ et $\text{tr}(A) = c_1 + c_2 < 0$. En revanche, si $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) > 0$ alors l'équilibre est *instable*. On déduit que lorsque $\det(A) > 0$, une condition suffisante de l'instabilité est $\text{tr}(A) > 0$.
2. Un point selle apparaît si et seulement si $\det(A) < 0$. Alors l'équilibre est dit en *point selle* et est localement stable sur un domaine de stabilité appelé *branche stable*. Cette branche est une variété $F \subset \mathbb{R}$ à une seule dimension (ici) de l'espace des deux variables, telle que pour tout $\mathbf{f}(t_0) \in F$, la solution de l'ED1 admette que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}^*(t) \rightarrow \mathbf{f}^e$.

² D'autres concepts de stabilité existent mais ne sont pas abordés ici.

Exemple : Si on reprend le système homogène de l'exemple précédent alors l'équilibre est qualifiable de point selle car

$$\det(A) = -5 < 0$$

Il est donc globalement instable sauf pour une branche stable telle que $f_1(0) + f_2(0) = 0$. Comme on peut le voir à partir de la solution dans l'exemple en posant maintenant $\mathbf{f}(0) = (a, b)^T$, les constantes inconnues (K, J) valent

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}K - J \\ K + J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} K^* \\ J^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(b+a) \\ \frac{1}{3}(b-2a) \end{pmatrix}$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}^*(t) = \mathbf{f}^e$ si et seulement si $K = 0$ soit $b + a = 0$.

• SED1 non linéaire

Dans de nombreux problèmes, la linéarité des équations dynamiques n'est pas admise a priori. Il est alors difficile de résoudre de manière explicite de tels systèmes. Une analyse qualitative de la solution est alors préférable. Elle recouvre deux aspects : la *linéarisation* du système autour des équilibres et l'analyse des variations des variables en fonction de leur niveau, via le *diagramme de phases*. Soit un SED1 autonome tel que

$$\begin{cases} f_1'(t) = \phi_1(f_1(t), f_2(t)) \\ f_2'(t) = \phi_2(f_1(t), f_2(t)) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_1(t_0) = y_0 \\ f_2(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Les équilibres (s'ils existent) sont ici les valeurs \mathbf{f}^e qui résolvent le système (C.10) soit

$$\begin{cases} \phi_1(f_1^e, f_2^e) = 0 \\ \phi_2(f_1^e, f_2^e) = 0 \end{cases}$$

Linéarisation Il est possible de réaliser la *linéarisation* de (C.10) autour de l'équilibre stationnaire \mathbf{f}^e de la manière suivante

$$\mathbf{f}'(t) = A(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^e) \quad \text{avec} \quad A \equiv J\Phi(\mathbf{f}^e) \quad (\text{C.11})$$

où $\Phi(\mathbf{f}^e) = [\phi_1(f_1^e, f_2^e), \phi_2(f_1^e, f_2^e)]^T$ et $J\Phi(\mathbf{f}^e)$ est la matrice jacobienne de $\Phi(\mathbf{f})$ évaluée en \mathbf{f}^e . De plus, si $\det(A) \neq 0$, alors dans un voisinage de l'équilibre \mathbf{f}^e , la solution $\mathbf{f}^*(t)$ se comporte (en général) comme la solution du système linéaire (C.11). Notamment, l'analyse de la stabilité (locale) des équilibres, menée dans le paragraphe précédent s'applique.

Exemple : Soit le SED1 non linéaire suivant :

$$\begin{cases} f_1'(t) = f_1(t)(1 - f_1(t) - 2f_2(t)) \\ f_2'(t) = f_2(t)(1 - f_2(t) - 2f_1(t)) \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

On peut déterminer 4 équilibres stationnaires, $\mathbf{f}^e \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$. La matrice jacobienne de Φ s'écrit

$$J\Phi(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1-2f_1-2f_2 & -2f_1 \\ -2f_2 & 1-2f_1-2f_2 \end{pmatrix}$$

La linéarisation du système non linéaire autour de $\mathbf{f}^e = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (par exemple) est donc

$$\mathbf{f}'(t) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1'(t) = -\frac{1}{3}(f_1(t) + 2f_2(t)) \\ f_2'(t) = -\frac{1}{3}(2f_1(t) + f_2(t)) \end{cases}$$

La solution de ce système linéaire est identique à celle de (C.12) autour de $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. L'étude des valeurs propres de $J\Phi(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ permet de voir que cet équilibre est un point-selle. En effet, on a $\det(J\Phi(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = -\frac{1}{3} < 0$ et on peut vérifier que $\text{tr}(J\Phi(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = -\frac{2}{3} < 0$ puisque les valeurs propres valent $\frac{1}{3}$ et -1 .

Diagramme de phases Il est possible de préciser l'allure de la solution autour des équilibres en décrivant les évolutions des variables \mathbf{f} en fonctions de leurs variations \mathbf{f}' . Pour cela, on peut procéder par une représentation graphique dans le plan (f_1, f_2) qui peut être construite à partir de la méthode suivante :

1. Détermination des *isoclines* (de pente 0) ou *lignes de phases*. Ce sont les lieux des points (f_1, f_2) tels que la variation d'une variable est toujours nulle, soit donc les ensembles pour $i = 1, 2$: $I_i = \{(f_1, f_2) | \phi_i(f_1, f_2) = 0\}$. Par définition, les équilibres sont à l'intersection des isoclines que l'on peut tracer dans le plan (f_1, f_2) .
2. Fléchage du *diagramme des phases* de part et d'autre des isoclines pour déterminer les isosecteurs, c'est-à-dire les lieux des variables dans le plan (f_1, f_2) où les variables évoluent dans un sens donné. Par exemple, lorsque $f_1' > 0$ et $f_2' < 0$ alors f_1 croît et f_2 décroît avec t . Dans le cas à 2 variables, on peut alors représenter ces variations par une flèche « \searrow » orientée dans le sens « Sud-Est ». On peut donc flécher en utilisant le tableau suivant

$f_1' \backslash f_2'$	> 0	$= 0$	< 0
> 0	\nearrow	\rightarrow	\searrow
$= 0$	\uparrow	\mathbf{f}^e	\downarrow
< 0	\nwarrow	\leftarrow	\swarrow

3. Représentation stylisée des trajectoires autour des équilibres en suivant les phases selon l'orientation du diagramme (fléchage) et en fonction des conditions initiales. Les trajectoires ne peuvent se croiser qu'aux points d'équilibres.

Exemple : Soit le SED1 non linéaire suivant

$$\begin{cases} f_1'(t) = 1 - f_1(t) - 2f_1(t)f_2(t) \\ f_2'(t) = 1 - f_2(t) - 2f_1(t)f_2(t) \end{cases}$$

Les équilibres sont $\mathbf{f}^e \in \{(-1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$: le premier est un point selle et le second un nœud propre stable. Les isoclines sont telles que en omettant t :

$$\begin{cases} 1 - f_1 - 2f_1f_2 = 0 \\ 1 - f_2 - 2f_1f_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = \frac{1-f_1}{2f_1} \\ f_2 = \frac{1}{1+2f_1} \end{cases}$$

Ici les isosecteurs et le fléchage obéissent à

$$\begin{aligned} f_1' > 0 : & \begin{cases} f_2 < \frac{1-f_1}{2f_1} & \text{si } f_1 > 0 \\ f_2 > \frac{1-f_1}{2f_1} & \text{si } f_1 < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_1' < 0 : & \begin{cases} f_2 > \frac{1-f_1}{2f_1} & \text{si } f_1 > 0 \\ f_2 < \frac{1-f_1}{2f_1} & \text{si } f_1 < 0 \end{cases} \\ f_2' > 0 : & \begin{cases} f_2 < \frac{1}{1+2f_1} & \text{si } f_1 > -\frac{1}{2} \\ f_2 > \frac{1}{1+2f_1} & \text{si } f_1 < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2' < 0 : & \begin{cases} f_2 > \frac{1}{1+2f_1} & \text{si } f_1 > -\frac{1}{2} \\ f_2 < \frac{1}{1+2f_1} & \text{si } f_1 < -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Sur la figure C.1, on trouve en trait épais l'isocline $f_1'(t) = 0$ et en trait fin celui associé à $f_2'(t) = 0$.

Ainsi si les conditions initiales $\mathbf{f}(0)$ sont dans un voisinage de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, toute solution convergera uniformément vers cet équilibre. C'est aussi le cas si $\mathbf{f}(0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. En revanche pour $\mathbf{f}(0) = (-2, -2)$, la solution ne convergera pas vers l'équilibre $(-1, -1)$.

Remarque : L'analyse des systèmes non linéaires ici présentée est incomplète. Notamment elle n'aborde pas la question de l'apparition de solution oscillatoire autour des équilibres ni de cycles limites. Les solutions oscillatoires (centre ou foyer) apparaissent lorsque les valeurs propres ne sont pas réelles. Les cycles limites sont spécifiques aux systèmes non linéaires et impliquent que la solution soit enserrée dans une courbe fermée autour d'un équilibre. Leur traitement demande des notions mathématiques plus avancées que celles présentées dans ce manuel.

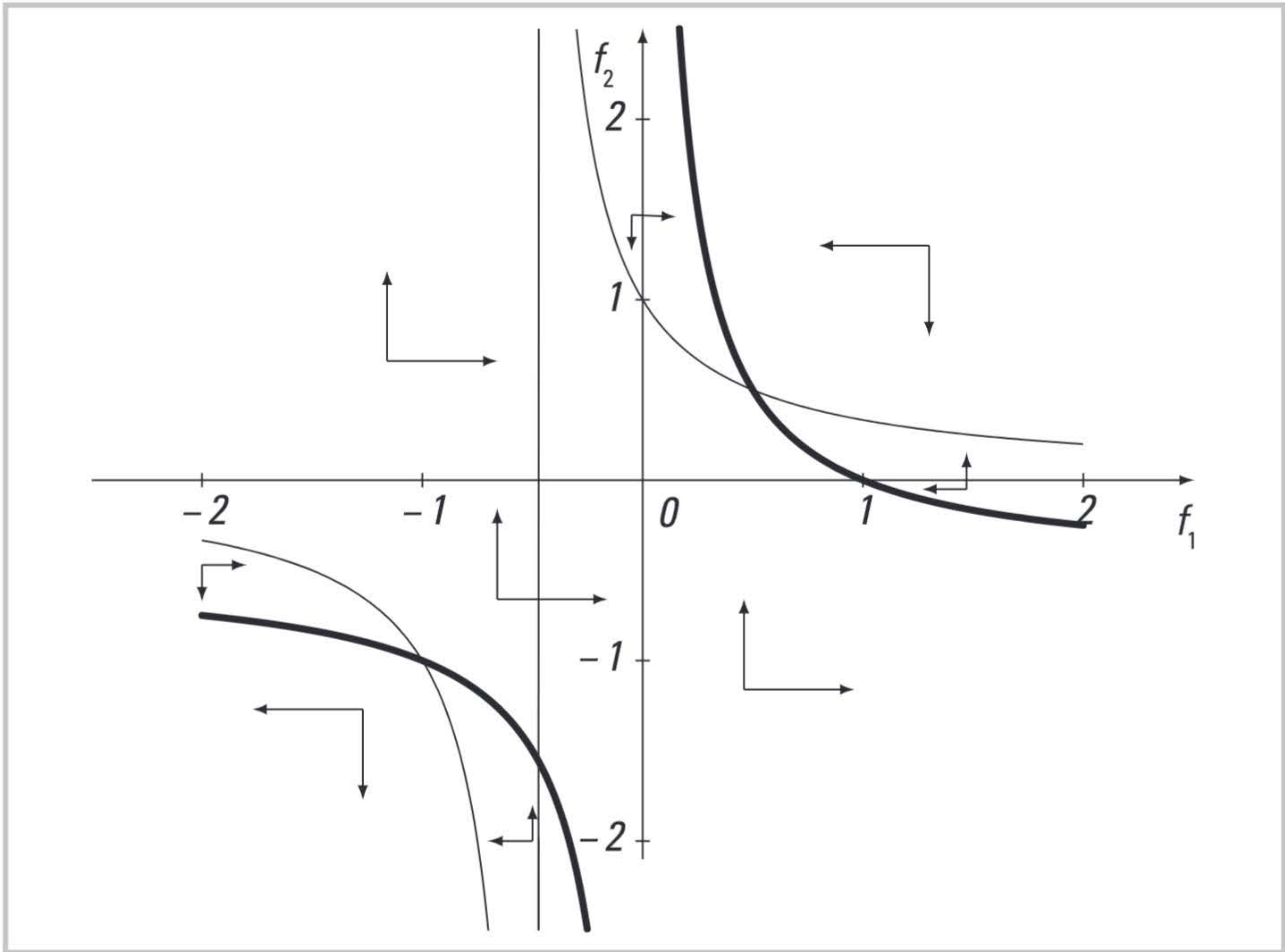


FIGURE C.1
Diagramme des phases

C.3 Équation aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation impliquant les dérivées partielles d'une fonction inconnue, la solution étant cette fonction inconnue. Ainsi si $f(t, s)$ est une fonction à deux variables (s, t) qui est continue dérivable et si Φ est une fonction continue à 8 variables $\Phi : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ alors une équation aux dérivées partielles en $f(t)$ peut s'écrire (ici au deuxième ordre) :

$$\Phi(f'_t(t, s), f'_s(t, s), f''_{tt}(t, s), f''_{ts}(t, s), f''_{ss}(t, s), f(t, s), t, s) = 0 \quad (\text{C.13})$$

où $f(t, s)$ est la fonction réelle que l'on doit déterminer. Il y a en général une infinité de solution à un EDP donnée comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple : Soit l'EDP du premier ordre suivante

$$f'_t(t, s) - f'_s(t, s) = 0$$

On vérifie que la fonction $f(t, s) = a \ln(t + s) + b$ où $a \neq 0$ est solution puisque $f'_t(t, s) = f'_s(t, s) = \frac{1}{t+s}$. Mais les fonctions $f(t, s) = \sin(t + s)$ et $f(t, s) = 3(t + s)$ sont aussi solution. En général, si g est une fonction continue dérivable alors $f(t, s) = g(t + s)$ est solution.

Pour réduire l'ensemble des solutions d'une EDP, la plupart du temps, on associe aussi des conditions dites initiales ou aux bornes qui se présentent sous la forme de fonction. Par exemple $f(t_0, s) = g(s)$ et $f(t, s_0) = h(t)$ où g et h sont des fonctions connues.

Dans ce qui suit, on n'étudie que les EDP du premier ordre (EDP1) linéaire et quadratique.

EDP1 linéaire

Soit l'EDP1 linéaire

$$a_1(t, s) f'_t(t, s) + a_2(t, s) f'_s(t, s) + b_1(t, s) f(t, s) + b_2(t, s) = 0 \quad (\text{C.14})$$

où $a_i(t, s)$ et $b_i(t, s)$ sont des fonctions connues.

Pour déterminer une solution, considérons le système homogène d'ED suivant pour une variable indépendante réelle quelconque $y \in Y$ où $Y \subset \mathbb{R}$ avec $0 \in Y$:

$$\begin{cases} t'(y) = a_1(t(y), s(y)) \\ s'(y) = a_2(t(y), s(y)) \end{cases}$$

La solution de ce système (si elle existe) s'appelle les *courbes caractéristiques* de (C.14). Notons-la $(\tau(y), \sigma(y))$. De plus, définissons la condition initiale de l'ED $(\tau(0), \sigma(0)) = (\tau_0, \sigma_0)$ où $(\tau_0, \sigma_0) \in \mathbb{R}^2$ dépend de la condition initiale de l'EDP qui aura été définie. En posant $\phi(y) = f(\tau(y), \sigma(y))$, et puisque par définition $\tau'(y) = a_1(\tau(y), \sigma(y))$ et $\sigma'(y) = a_2(\tau(y), \sigma(y))$ alors

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= \tau'(y) f'_t(\tau(y), \sigma(y)) + \sigma'(y) f'_s(\tau(y), \sigma(y)) \\ &= a_1(\tau(y), \sigma(y)) f'_t(\tau(y), \sigma(y)) + a_2(\tau(y), \sigma(y)) f'_s(\tau(y), \sigma(y)) \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'à partir de (C.14), $\phi(y)$ est solution de l'ED linéaire suivante :

$$\phi'(y) + b_1(\tau(y), \sigma(y)) \phi(y) + b_2(\tau(y), \sigma(y)) = 0 \quad \text{avec} \quad \phi(0) = f(\tau_0, \sigma_0)$$

Donc en se donnant une valeur $f(\tau_0, \sigma_0)$, on détermine directement la solution $\phi^*(y)$ et l'EDP est alors résolue.

Exemple : Soit l'EDP1 linéaire suivante

$$2f'_t(t, s) + 3f'_s(t, s) + f(t, s) = 0 \text{ avec } f(0, s) = 5s, \forall s$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, les courbes caractéristiques sont ici des droites de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} t'(y) = 2 \\ s'(y) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau(y) = 2y + \tau_0 \\ \sigma(y) = 3y + \sigma_0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \tau(0) = \tau_0 \in \mathbb{R} \\ \sigma(0) = \sigma_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La condition $f(0, s) = 5s$ contraint à ce que $\tau_0 = 0$ et donc en posant $\phi(y) = f(2y, 3y + \sigma_0)$, on a l'ED linéaire :

$$\phi'(y) + \phi(y) = 0 \text{ avec } \phi(0) = f(0, \sigma_0) = 5\sigma_0$$

dont la solution est $\phi^*(y) = 5\sigma_0 e^{-y}$ pour tout $y, \sigma_0 \in \mathbb{R}$. Enfin, en changeant de variables ($y = \frac{t}{2}$ et $\sigma_0 = s - \frac{3}{2}t$), la solution s'écrit $f(t, s) = 5(s - \frac{3}{2}t)e^{-\frac{t}{2}}$.

EDP1 quadratique

Soit l'EDP1 quadratique :

$$f'_t(t, s) + asf'_s(t, s) + b(f'_s(t, s))^2 - \frac{c}{2}s^2 = 0 \quad (\text{C.15})$$

en considérant la condition initiale $f(t_0, s) = ds - \frac{e}{2}s^2$ et où a, b, c, d, e sont des coefficients réels non nuls. Dans ce cas, la méthode consiste à essayer une solution quadratique du genre $f(t, s) = \gamma(t) + \beta(t)s - \frac{1}{2}\alpha(t)s^2$ où maintenant $\gamma(t), \beta(t), \alpha(t)$ sont les fonctions inconnues. La condition initiale s'écrit alors pour tout s , $\gamma(t_0) + \beta(t_0)s - \frac{1}{2}\alpha(t_0)s^2 = ds - \frac{e}{2}s^2$, ce qui par identification implique $\gamma(t_0) = 0$, $\beta(t_0) = d$ et $\alpha(t_0) = e$. En remplaçant la solution quadratique conjecturée $f(t, s)$ dans (C.15), il vient

$$\gamma'(t) + \beta'(t)s - \frac{1}{2}\alpha'(t)s^2 + as(\beta(t) - \alpha(t)s) + b(\beta(t) - \alpha(t)s)^2 - \frac{c}{2}s^2 = 0$$

ce qui donne, en réarrangeant les termes de l'équation comme un polynôme du second ordre en s

$$\gamma'(t) - b\beta^2(t) + [\beta'(t) + \beta(t)(a - 2b\alpha(t))]s + \left[b\alpha^2(t) - a\alpha(t) - \frac{1}{2}\alpha'(t) - \frac{c}{2} \right]s^2 = 0$$

Comme cette équation doit être vraie pour tout s alors les coefficients du polynôme doivent être identiquement nuls, ce qui conduit à écrire le système d'ED suivant

$$\begin{cases} \gamma'(t) - b\beta^2(t) = 0 \\ \beta'(t) + \beta(t)(a - 2b\alpha(t)) = 0 \\ b\alpha^2(t) - a\alpha(t) - \frac{1}{2}\alpha'(t) - \frac{c}{2} = 0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \gamma(t_0) = 0 \\ \beta(t_0) = d \\ \alpha(t_0) = e \end{cases}$$

La résolution de celui-ci peut-être menée en considérant d'abord la dernière équation différentielle en $\alpha(t)$ qui est indépendante de $\gamma(t)$ et de $\beta(t)$. Par séparation des variables, il vient, en utilisant la primitive de la fonction hyperbolique dite « Argument tangente hyperbolique »

$$\begin{aligned} \int \frac{d\alpha}{2b\alpha^2 - 2a\alpha - c} &= \int dt + K \\ \Rightarrow -\frac{1}{2A} \left(\ln \left(\frac{2b\alpha - a}{A} + 1 \right) - \ln \left(\frac{a - 2b\alpha}{A} + 1 \right) \right) &= t + K \quad (\text{C.16}) \end{aligned}$$

avec $A = \sqrt{2cb + a^2}$. En outre puisque $\alpha(t_0) = e$ alors $K^* = -\frac{1}{2A} \left(\ln \left(\frac{2be - a}{A} + 1 \right) - \ln \left(\frac{a - 2be}{A} + 1 \right) \right) - t_0$. Ainsi on peut déterminer $\alpha^*(t)$ en résolvant (C.16), ce qui donne

$$\alpha^*(t) = -\frac{e^{2A(t-t_0)} [c + e(a - A)] - c - e(a + A)}{e^{2A(t-t_0)} [A - 2be + a] + 2be - a + A}$$

La seconde équation différentielle en $\beta(t)$ est alors linéaire et la première en $\gamma(t)$ est triviale.

D DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES

Cette annexe est destinée à démontrer les théorèmes sur les propriétés des fonctions et sur l'optimisation. Pour cela, le théorème de Weierstrass (cf. : théorème 1.18 de la section 1.5) est accepté car il fait appel à des notions de topologie trop avancées. De plus, la convention suivante est adoptée : chaque fois qu'un théorème s'étend aisément à deux variables, on ne le démontre que pour une variable.

D.1 Théorèmes sur les fonctions

Théorèmes de base

- *Théorème de Rolle*

Théorème D.1 (Théorème de Rolle). *Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0$$

Démonstration. Le résultat est évident si f est constante sur l'intervalle $]a, b[$ puisque alors $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$. Sinon, en vertu du théorème de Weierstrass (cf. : section 1.5, théorème 1.18), il existe un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) \geq f(x) \forall x \in]a, b[\text{ ou } f(c) \leq f(x) \forall x \in]a, b[$$

Dans le premier (resp. second) cas, l'expression

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

a, pour $h \neq 0$, le signe contraire (resp. identique) de h , et f étant dérivable en c , la limite de cette expression quand h tend vers 0 est nulle. Par conséquent, on a $f'(c) = 0$. \square

- *Développement en série*

Commençons par présenter les symboles suivants :

- le terme $x!$ se dit factorielle x , et est égal au produit des x premiers nombres entiers, soit $1 \times 2 \times \dots \times x$. Par convention, $0! = 1$,
- le terme f''' représente la dérivée 3^{ème} de la fonction f .

Présentons le théorème de Taylor.

Théorème D.2 (Théorème de Taylor à l'ordre 2 : forme de Lagrange) Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$, 2 fois dérivable sur $[a, b]$, et 3 fois dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(c)(b-a)^3 \quad (\text{D.1})$$

Démonstration. Il existe un nombre réel k et un seul tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{3!} k(b-a)^3$$

Définissons la fonction continue g sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!} (b-x) - \frac{f''(x)}{2!} (b-x)^2 - \frac{k}{3!} (b-x)^3$$

La dérivée de g est :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + f''(x)(b-x) - \frac{f'''(x)}{2!} (b-x)^2 + \frac{k}{2!} (b-x)^2 \\ &= -\frac{f'''(x)}{2!} (b-x)^2 + \frac{k}{2!} (b-x)^2 \end{aligned}$$

Comme on a $g(a) = g(b) = 0$, appliquons le théorème D.1. Il existe donc au moins un point c tel que $g'(c) = 0$. On tire de la dernière égalité que, puisque $b-c \neq 0$, $k = f'''(c)$. \square

L'expression (D.1) est appelée le développement en série de Taylor à l'ordre 2. Il permet d'approximer une fonction plusieurs fois dérivable autour d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent des dérivées de la fonction en ce point.

Montrons que le développement en série est une bonne approximation d'une fonction. Pour cela, présentons la définition suivante :

Définition D.1 (Polynôme de Taylor). Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au point $x = a$ est

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 \quad (\text{D.2})$$

Ce polynôme reprend donc le développement en série à l'exception du terme dépendant de c , $\frac{1}{3!} f'''(c)(b-a)^3$, qui est appelé le reste. Dès lors, la différence entre (D.1) et (D.2) indique qu'en utilisant le polynôme de Taylor, on commet une erreur égale au reste :

$$\frac{1}{3!} f'''(c)(b-a)^3$$

Supposons que la dérivée 3^{ème} soit bornée, $f'''(x) \leq M$, l'erreur maximale est de $M \frac{(b-a)^3}{3!}$. Si, alors on rapproche b de a , on a que l'erreur est proche de 0.

La moralité est que toute fonction dérivable peut, à un reste près proche de 0, être approximée par un polynôme de Taylor.

À l'ordre 0, le théorème précédent est connu comme le théorème des accroissements finis.

Théorème D.3 (Théorème des accroissements finis). Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Par suite, le théorème D.2 peut se généraliser à deux variables. Il est donc possible d'approcher toute fonction $f(\mathbf{x})$ par le polynôme de Taylor autour du point \mathbf{a} de la façon suivante à l'ordre 2

$$f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{b} - \mathbf{a})^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Allure des fonctions d'une variable

Commençons par démontrer le théorème suivant.

Théorème D.4 (Théorème des inégalités fondamentales). Une fonction f est concave sur un intervalle $[\underline{x}, \bar{x}] \subset E$ si pour tout $x_0, x_1 \in [\underline{x}, \bar{x}]$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$f'(x_1)(x_0 - x_1) \geq f(x_0) - f(x_1) \geq f'(x_0)(x_0 - x_1)$$

Démonstration. Démontrons la première inégalité. Par définition, une fonction f est concave si :

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \leq f(tx_0 + (1-t)x_1)$$

ce qui est équivalent à :

$$f(x_0) - f(x_1) \leq \frac{f(tx_0 + (1-t)x_1) - f(x_1)}{t}$$

Notons $h = t(x_0 - x_1)$, on obtient

$$f(x_0) - f(x_1) \leq \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} (x_0 - x_1)$$

Par passage à la limite, on a

$$f(x_0) - f(x_1) \leq f'(x_1)(x_0 - x_1)$$

La preuve de la deuxième inégalité suit le même raisonnement. \square

• **Démonstration du théorème 1.1 (Allure fonction 1)**

- (i) **Croissance.** Considérons $f' \geq 0$ dans $]x, \bar{x}[$ et considérons deux points x et $x + h$, avec $h > 0$, arbitraires de l'intervalle $]x, \bar{x}[$. Le théorème D.3 indique l'existence d'un point $c \in]x, x + h[$ pour lequel :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(c) \geq f(x)$$

ce qui prouve que la fonction est croissante.

- (ii) **Concavité.** Effectuons le développement en série de f à l'ordre 2, on a :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_1) + f'(x_1)(x_0 - x_1) + \frac{1}{2}f''(c)(x_0 - x_1)^2 \\ \Leftrightarrow f(x_0) - f(x_1) - f'(x_1)(x_0 - x_1) &= \frac{1}{2}f''(c)(x_0 - x_1)^2 \end{aligned}$$

En vertu du théorème D.4, si f est concave, le membre de gauche est négatif. Le membre de droite doit également l'être. Donc, la concavité de f se traduit par le signe négatif de sa dérivée seconde. \square

Remarque : La fonction f est convexe si $f''(x) \geq 0$.

Allure des fonctions de deux variables

Démontrons au préalable un premier théorème.

Théorème D.5 (Théorème de Schwartz). *Si une fonction f possède des dérivées secondes continues au point \mathbf{x}^0 , alors :*

$$f''_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) = f''_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0)$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} g(h) &= f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0, x_2^0 + h) - (f(x_1^0 + h, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)) \\ \text{et } y_2(x_2) &= f(x_1^0 + h, x_2) - f(x_1^0, x_2) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$g(h) = y_2(x_2^0 + h) - y_2(x_2^0)$$

Par le théorème D.9, on a :

$$y'_2(x_2) = f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)$$

Le théorème D.3 appliqué à $y(x_2)$ donne

$$y_2(x_2 + h) - y_2(x_2) = h y'_2(x_2 + k_2 h)$$

avec k_2 une constante appartenant à $]0, 1[$. On en déduit que

$$g(h) = h(f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + k_2 h) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + k_2 h))$$

Appliquons à nouveau le théorème D.3 à $f'_{x_2}(x_1, x_2^0 + k_2 h)$, on obtient

$$g(h) = h^2 f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + k_1 h, x_2^0 + k_2 h)$$

avec k_1 une constante appartenant à $]0, 1[$. Comme la fonction f est de classe C^2 , par passage à la limite, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}^0)$$

En suivant un raisonnement symétrique à partir de la fonction $y_1(x_1) = f(x_1, x_2^0 + h) - f(x_1, x_2^0)$, on peut montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = f''_{x_2 x_1}(\mathbf{x}^0)$$

Comme f'' est continue, la limite est unique et donc $f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}^0) = f''_{x_2 x_1}(\mathbf{x}^0)$. \square

• Démonstration du théorème 1.2 (Allure fonction 2)

- (i) **Croissance partielle.** La dérivée partielle par rapport à une variable consistant à considérer l'autre variable comme constante, on peut toujours écrire que $g(x_1) = f(x_1, x_2)$ et donc $g'(x_1) = f'_{x_1}(x_1, x_2)$. La démonstration suit alors le même raisonnement que pour la croissance d'une variable.
- (ii) **Croissance globale.** Immédiate puisque les dérivées partielles traduisent l'évolution par rapport à l'une des variables.
- (iii) **Concavité.** Le théorème D.4 dit que si f est concave, alors :

$$\nabla f(\mathbf{x}^0)^T (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) \leq f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^1) \leq \nabla f(\mathbf{x}^1)^T (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)$$

Tandis que le développement limité à l'ordre 2 indique

$$\frac{1}{2!} (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^1) (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) = f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^1) - \nabla f(\mathbf{x}^1)^T (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) \quad (\text{D.3})$$

Comme le membre de droite est négatif, l'expression $(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^1)(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)$ doit l'être aussi. Or, il s'agit d'une forme quadratique. Pour qu'elle soit négative, la matrice hessienne

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}) \\ f''_{x_2 x_1}(\mathbf{x}) & f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

qui en vertu du théorème D.5 est symétrique, doit être au moins semi-définie négative. Par le critère des mineurs (voir annexe A), on a :

$$f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) \leq 0, f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ et } f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x})f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) - f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x})^2 \geq 0$$

Remarque : La convexité d'une fonction à deux variables est donnée par les conditions

$$f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) \geq 0; f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ et } f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x})f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) - f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x})^2 \geq 0$$

Fonction supermodulaire

Présentons la définition de la super (sous) modularité.

Définition D.2 (Supermodularité). *Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite supermodulaire si et seulement si, pour toutes paires \mathbf{x}^0 et \mathbf{x}^1 tels que $x_1^1 \geq x_1^0$ et $x_2^1 \geq x_2^0$:*

$$f(x_1^1, x_2^1) - f(x_1^0, x_2^1) \geq f(x_1^1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0) \quad (\text{D.4})$$

Si l'inégalité est inversée, la fonction est dite sous-modulaire.

On a le théorème suivant.

Théorème D.6 (Fonction supermodulaire, ordre 2). *Une fonction dérivable f est dite supermodulaire (resp. sous-modulaire) si et seulement si, pour tout \mathbf{x} :*

$$f''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0 \text{)}$$

Démonstration. L'équation (D.4) peut se réécrire

$$f(x_1^1, x_2^1) - f(x_1^0, x_2^1) - (f(x_1^1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)) \geq 0$$

La fonction f étant de classe C^2 , cette inégalité se réécrit comme :

$$\int_{x_2^0}^{x_2^1} \int_{x_1^0}^{x_1^1} f''_{x_1 x_2}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \geq 0 \Leftrightarrow f''_{x_1 x_2}(\xi_1, \xi_2) \geq 0$$

puisque $x_1^1 \geq x_1^0$ et $x_2^1 \geq x_2^0$. □

Théorèmes des fonctions implicites et de la dérivée totale

• Fonctions implicites

Une fonction implicite se définit de la façon suivante :

Définition D.3 La fonction $x_2 = \varphi(x_1)$ est dite implicite si elle est définie à partir de l'équation $f(\mathbf{x}) = k$, où k est une constante.

Le théorème s'énonce comme :

Théorème D.7 (Théorème des fonctions implicites). Si $f'_{x_2}(\mathbf{x}) \neq 0$, la dérivée de la fonction implicite $x_2 = \varphi(x_1)$ est telle que :

$$\varphi'(x_1) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f'_{x_1}(\mathbf{x})}{f'_{x_2}(\mathbf{x})}$$

Démonstration. Puisque $f(\mathbf{x}) = k$, la différentiation des deux membres de cette égalité donne :

$$df(\mathbf{x}) = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\nabla f(\mathbf{x})^T d\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow f'_{x_1}(\mathbf{x})dx_1 + f'_{x_2}(\mathbf{x})dx_2 = 0 \quad \square$$

• Dérivée totale

Présentons pour commencer un premier théorème.

Théorème D.8 (Dérivée de la composée). La dérivée de la fonction composée $f(y(x))$ correspond à la dérivée en chaîne

$$f'(y(x))y'(x)$$

Démonstration. Par définition, la dérivée de $f(y(x))$ est donnée par

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y(x+h)) - f(y(x))}{h}$$

Or

$$\frac{f(y(x+h)) - f(y(x))}{h} = \frac{f(y(x+h)) - f(y(x))}{y(x+h) - y(x)} \times \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Sous certaines conditions (non détaillées ici), la limite d'un produit de fonction est égale au produit des limites de chaque fonction. Le passage à la limite quand $h \rightarrow 0$ permet de conclure. \square

Considérons désormais deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$. Notons $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$, puis considérons la fonction $g(x) = f(\mathbf{y}(x))$. On obtient :

Théorème D.9 (Dérivée totale). *La dérivée totale de la fonction g est :*

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = f'_{y_1(x)}(\mathbf{y}(x))y'_1(x) + f'_{y_2(x)}(\mathbf{y}(x))y'_2(x)$$

Démonstration. La différentielle de g est (par application combinée des dérivées partielles et de la dérivée en chaîne) :

$$\begin{aligned} dg(x) &= \nabla f(\mathbf{y}(x))^T \nabla \mathbf{y}(x) dx \\ &= f'_{y_1(x)}(\mathbf{y}(x))y'_1(x)dx + f'_{y_2(x)}(\mathbf{y}(x))y'_2(x)dx \end{aligned} \quad \square$$

Fonction quasi-concave

Débutons par la définition d'une fonction quasi-concave.

Définition D.4 (Fonction quasi-concave). *Une fonction f est quasi-concave si pour toute paire de points $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathcal{E}$ et $t \in [0, 1]$ alors*

$$f(t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1) \geq \min\{f(\mathbf{x}^0), f(\mathbf{x}^1)\}$$

Puis démontrons le théorème suivant :

Théorème D.10. *La fonction f est quasi-concave si et seulement si*

$$\nabla f(\mathbf{x}^1)(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) \geq 0 \text{ chaque fois que } f(\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}^1)$$

Démonstration. Par définition, si $f(\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}^1)$ alors $\min\{f(\mathbf{x}^0), f(\mathbf{x}^1)\} = f(\mathbf{x}^1)$ et donc

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1) &\geq f(\mathbf{x}^1) \\ \Leftrightarrow f(\mathbf{x}^1 + t(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)) - f(\mathbf{x}^1) &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{f(\mathbf{x}^1 + h) - f(\mathbf{x}^1)}{h}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) &\geq 0 \end{aligned}$$

avec $h = t(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)$. Par passage à la limite, on a $\nabla f(\mathbf{x}^1)^T(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) \geq 0$. \square

Présentons ensuite la définition suivante.

Définition D.5 (Matrice hessienne bordée). *La matrice hessienne de f bordée par son gradient est la matrice*

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 f(\mathbf{x}) & \nabla f(\mathbf{x}) \\ \nabla f(\mathbf{x})^T & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

• **Démonstration du théorème 1.11 (Quasi-concavité, ordre 2)**

En utilisant le développement limité à l'ordre 2 de f , déjà vu à la relation (D.3) ci-dessus, on a

$$\frac{1}{2!}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^1)(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) = f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^1) - \nabla f(\mathbf{x}^1)^T (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)$$

Ainsi, si $f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^1)$

$$\frac{1}{2!}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^1)(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) = -\nabla f(\mathbf{x}^1)^T (\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1) \leq 0$$

en vertu du théorème D.10. La quasi-concavité de la fonction f revient donc à s'assurer que la matrice hessienne est semi-définie négative étant donné que $f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^1)$, soit encore que $\nabla f(\mathbf{x})^T d\mathbf{x} = 0$ puisque $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^1$. Cela équivaut à signer une forme quadratique contrainte par une forme linéaire (voir annexe A). On peut donc border la matrice hessienne de f par le gradient de f . La règle de signature indique que f est quasi-concave si le déterminant de cette matrice définie dans (D.5) est positif, ce qui donne le résultat du théorème. \square

• **Démonstration du théorème 1.12 (Concavité et quasi-concavité)**

Si f est concave alors

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1) &\geq tf(\mathbf{x}^0) + (1-t)f(\mathbf{x}^1) \\ &\geq t \min\{f(\mathbf{x}^0), f(\mathbf{x}^1)\} + (1-t) \min\{f(\mathbf{x}^0), f(\mathbf{x}^1)\} \\ &\geq \min\{f(\mathbf{x}^0), f(\mathbf{x}^1)\}. \end{aligned}$$

\square

• **Démonstration du théorème 1.13 (Fonction quasi-concave et ensemble convexe)**

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathcal{A}_k$, donc $f(\mathbf{x}^0) \geq k$ et $f(\mathbf{x}^1) \geq k$. Cela implique que

$$\min\{f(\mathbf{x}^0), f(\mathbf{x}^1)\} \geq k$$

Ainsi, par la quasi-concavité de f on a pour $t \in [0, 1]$,

$$f(t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1) \geq \min\{f(\mathbf{x}^0), f(\mathbf{x}^1)\} \geq k$$

ce qui par définition de \mathcal{A}_k signifie que $t\mathbf{x}^0 + (1-t)\mathbf{x}^1 \in \mathcal{A}_k$, donc \mathcal{A}_k est convexe. \square

D.2 Théorèmes sur l'optimisation statique

Optimisation libre

• Démonstration du théorème 1.3 (Optimisation libre 1)

- (i) **Condition nécessaire.** Soit x^* tel que $f'(x^*) = 0$. Appliquons au voisinage de ce point, le théorème D.3. Il existe c tel que :

$$f(x) - f(x^*) = f'(c)(x - x^*)$$

Le membre de gauche est négatif ou nul. Donc si $x < x^*$, il faut $f' > 0$, sinon $f' < 0$. Comme la fonction est supposée continue, f' doit s'annuler en x^* .

- (ii) **Condition suffisante.** Réalisons un développement de Taylor à l'ordre 2 autour de x^* . On obtient :

$$f(x) - f(x^*) - f'(x^*)(x - x^*) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x^*)^2$$

Or, $f'(x^*) = 0$, donc cette expression se simplifie à :

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x^*)^2$$

Comme x^* est un maximum, le membre de gauche doit être négatif. Cela nécessite que $f''(c) < 0$ quel que soit c compris entre x et x^* . La concavité de f assure que la condition nécessaire est suffisante. \square

• Démonstration du théorème 1.4 (Optimisation libre 2)

Par prolongements aux fonctions de deux variables, le théorème D.3 assure :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{c})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

ce qui permet de démontrer la condition nécessaire : $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$. Enfin, le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point \mathbf{x}^* donne, étant donnée l'égalité précédente :

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \nabla^2 f(\mathbf{c}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

ce qui indique (via l'annexe A) que la matrice hessienne $\nabla^2 f(\mathbf{c})$ doit être définie négative. On conclut que la concavité est une condition suffisante. \square

• Démonstration du théorème 1.6 (Théorème de Topkis)

Procédons par l'absurde. Supposons que $x^*(a)$ n'est pas croissante, de sorte que pour $a_1 > a_0$: $x^*(a_1) < x^*(a_0)$. Ici les solutions $x^*(a_0)$ et $x^*(a_1)$ sont telles que

$$\begin{aligned} x^*(a_0) &= \arg \max_x f(x, a_0) : f(x^*(a_0), a_0) \geq f(x^*(a_1), a_0) \\ x^*(a_1) &= \arg \max_x f(x, a_1) : f(x^*(a_1), a_1) \geq f(x^*(a_0), a_1) \end{aligned}$$

Si la fonction f est supermodulaire en (x, a) alors en vertu de la définition D.2, on a

$$0 \geq f(x^*(a_0), a_1) - f(x^*(a_1), a_1) \geq f(x^*(a_0), a_0) - f(x^*(a_1), a_0) \geq 0 \quad (\text{D.6})$$

Cela implique alors que $f(x^*(a_0), a_1) \geq f(x^*(a_1), a_1)$ et donc $x^*(a_0)$ est aussi la solution du problème paramétrique $\max_x f(x, a_1)$ ce qui est contradictoire avec le fait que $x^*(a_1) < x^*(a_0)$. On procède de la même manière pour le fait que $f(x^*(a_0), a_0) \geq f(x^*(a_1), a_0)$. \square

Optimisation contrainte

La démonstration n'est effectuée que dans le cadre de deux variables et deux contraintes.

• Démonstration du théorème 1.9 (conditions nécessaires)

Notons $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \ell \\ \lambda \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$, les conditions nécessaires sont à l'aide de l'écriture vectorielle :

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) - J\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{\Lambda} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{\Lambda} &\geq \mathbf{0}, \ell(X - g(\mathbf{x})) = 0, \lambda(\xi - \gamma(\mathbf{x})) = 0 \end{aligned}$$

Notons \mathbf{x}_c la solution du problème contraint.

À l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction objectif, on a :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_c) + \nabla f(\mathbf{x}_c)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \\ &\Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}_c)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

puisque $f(\mathbf{x}_c) \geq f(\mathbf{x})$.

Par ailleurs, un développement équivalent de $\mathbf{G}_s(\mathbf{x}) - \mathbf{X}$ où $\mathbf{G}_s(\mathbf{x})$ est la matrice des contraintes saturées, donne :

$$\mathbf{G}_s(\mathbf{x}) - \mathbf{X} = \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_c) - \mathbf{X} + J\mathbf{G}_s(\mathbf{x}_c)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \leq \mathbf{0}$$

Par définition, on a $\mathbf{G}_s(\mathbf{x}_c) - \mathbf{X} = \mathbf{0}$, d'où l'on déduit que :

$$J\mathbf{G}_s(\mathbf{x}_c)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \leq \mathbf{0} \quad (\text{D.8})$$

Ainsi, trouver la solution contrainte du problème revient à considérer simultanément les conditions (D.7) et (D.8).

Présentons le lemme de Farkas.

Lemme 1. Soient les vecteurs $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et A une matrice carrée d'ordre 2, alors si \mathbf{u} est tel que

$$\mathbf{v}^T \mathbf{u} \leq 0 \text{ et } A\mathbf{u} \geq 0$$

il est équivalent de dire qu'il existe un vecteur $\mathbf{\Lambda} \geq 0$ tel que :

$$\mathbf{v} + A^T \mathbf{\Lambda} = 0$$

Le lemme de Farkas permet d'identifier $\nabla f(\mathbf{x}_c)$ à \mathbf{v} , $-J\mathbf{G}_s(\mathbf{x}_c)^T$ à A et $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)$ à \mathbf{u} . Ainsi, on a :

$$\nabla f(\mathbf{x}_c) - J\mathbf{G}_s(\mathbf{x}_c)\mathbf{\Lambda} = 0$$

En posant égal à 0 le multiplicateur associé à une contrainte libre, les conditions nécessaires sont démontrées. \square

• Démonstration du théorème 1.10 (conditions suffisantes)

Supposons que la contrainte $g(\mathbf{x}) \leq X$ soit saturée. Il s'en suit $g(\mathbf{x}_c) = X$, ce qui donne la fonction implicite $x_{2_c} = \varphi(x_{1_c})$. On peut ainsi réécrire la contrainte $g(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c})) = X$ et définir la fonction $F(x_{1_c}) = f(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c}))$. En différentiant ces deux expressions, on obtient

$$\begin{aligned} g'_{x_1}(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c})) + g'_{x_2}(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c}))\varphi'(x_{1_c}) &= 0 \\ F'(x_{1_c}) &= f'_{x_1}(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c})) + f'_{x_2}(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c}))\varphi'(x_{1_c}) \end{aligned}$$

En multipliant la première égalité par ℓ , puis en la retranchant à la seconde, on a :

$$\begin{aligned} F'(x_{1_c}) &= f'_{x_1}(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c})) - \ell g'_{x_1}(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c})) + [f'_{x_2}(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c})) - \ell g'_{x_2}(x_{1_c}, \varphi(x_{1_c}))]\varphi'(x_{1_c}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle du théorème 1.9. Le point \mathbf{x}_c satisfait donc les conditions nécessaires. C'est effectivement un maximum si $F''(x_{1_c}) < 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} F''(x_{1_c}) &= f''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_c) - \ell g''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_c) + 2[f''_{x_2 x_1}(\mathbf{x}_c) - \ell g'_{x_2 x_1}(\mathbf{x}_c)]\varphi'(x_{1_c}) + [f''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}_c) - \ell g''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}_c)]\varphi'(x_{1_c})^2 \\ &= L''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_c) - 2L''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}_c) \frac{g'_{x_1}(\mathbf{x}_c)}{g'_{x_2}(\mathbf{x}_c)} + L''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}_c) \left(\frac{g'_{x_1}(\mathbf{x}_c)}{g'_{x_2}(\mathbf{x}_c)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{g'_{x_2}(\mathbf{x}_c)^2} [L''_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_c) g'_{x_2}(\mathbf{x}_c)^2 - 2L''_{x_1 x_2}(\mathbf{x}_c) g'_{x_1}(\mathbf{x}_c) g'_{x_2}(\mathbf{x}_c) + L''_{x_2 x_2}(\mathbf{x}_c) g'_{x_1}(\mathbf{x}_c)^2] \\ &= -\frac{1}{g'_{x_2}(\mathbf{x}_c)^2} \det \begin{pmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{x}_c) & \nabla g(\mathbf{x}_c) \\ \nabla g(\mathbf{x}_c)^T & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de $\varphi'(x_{1_c}) = -\frac{g'_{x_1}(\mathbf{x}_c)}{g'_{x_2}(\mathbf{x}_c)}$ par application du théorème des fonctions implicites (théorème D.7).

Le même raisonnement prévalant si la contrainte $\gamma(\mathbf{x}) \leq \xi$ sature au lieu de $g(\mathbf{x}) \leq X$, on déduit, conformément à l'annexe A, que $F''(x_{1_c}) < 0$ si le déterminant de la matrice hessienne $\nabla^2 L(\mathbf{x}_c)$ bordée par $J\mathbf{G}_s(\mathbf{x}_c)$ est positif. \square

D.3 Théorèmes sur l'optimisation dynamique

Les théorèmes sont démontrés dans le cas continu.

Principe du maximum

• Démonstration du théorème 2.2 (conditions nécessaires)

Soient $(x^*(t), y^*(t), \lambda^*(t))$ une solution optimale et

$$H^*(t) = f(x^*(t), y^*(t), t) + \lambda^*(t)g(x^*(t), y^*(t), t)$$

Soit \mathcal{X} la famille de fonctions $x(t)$ qui obéissent à $y'(t) = g(x(t), y(t), t)$ avec $y(0) = y_0$ et $y(T) = y_T$. Donc par définition $x^*(t) \in \mathcal{X}$.

Soit la famille de fonctions paramétriques $\alpha(t, \varepsilon)$ telles que $x(t) = x^*(t) + \varepsilon\alpha(t, \varepsilon) \in \mathcal{X}$ où $\varepsilon > 0$. La trajectoire d'état résultante s'écrit alors $y(t, \varepsilon)$.

Dans le problème Pd_2 , la fonction valeur $V(y_0, 0, \varepsilon)$ est maximisée si $\varepsilon = 0$. On montre que l'on retrouve nécessairement le Principe du maximum si $\varepsilon = 0$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} V(y_0, 0, \varepsilon) &= \int_0^T f(x^*(t) + \varepsilon\alpha(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t) dt \\ &= \int_0^T \left[f(x^*(t) + \varepsilon\alpha(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t) \right. \\ &\quad \left. + \lambda(t)g(x^*(t) + \varepsilon\alpha(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t) - \lambda(t)y'(t, \varepsilon) \right] dt \end{aligned}$$

Posons $H(t, \varepsilon) = f(x^*(t) + \varepsilon\alpha(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t) + \lambda(t)g(x^*(t) + \varepsilon\alpha(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t)$ alors

$$\begin{aligned} V(y_0, 0, \varepsilon) &= \int_0^T [H(t, \varepsilon) - \lambda(t)y'(t, \varepsilon)] dt \\ &= \int_0^T [H(t, \varepsilon) + \lambda'(t)y(t, \varepsilon)] dt - \lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 \end{aligned}$$

Or, si $V(y_0, 0, \varepsilon)$ est maximisée quand $\varepsilon = 0$, la condition nécessaire $V'_\varepsilon(y_0, 0, 0) = 0$ doit être vérifiée quelle que soit la fonction paramétrique arbitraire $\alpha(t, 0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} V'_\varepsilon(y_0, 0, 0) &= \int_0^T \left[H'_{x(t)}(t, 0)\alpha(t, 0) + (H'_{y(t)}(t, 0) + \lambda'(t)) \frac{dy(t, \varepsilon)}{d\varepsilon} \right] dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par construction, on a $H(t) = H(t, 0)$, on retrouve bien les conditions nécessaires :

$$\begin{aligned} H'_{x(t)}(t) &= 0 \\ \lambda'(t) &= -H'_{y(t)}(t) \end{aligned}$$

auxquelles s'ajoute le mouvement de la variable d'état : $y'(t) = H'_{\lambda(t)}(t)$. □

• **Démonstration du théorème 2.10 (conditions suffisantes)**

Notons $f^*(t) = f(x^*(t), y^*(t), \lambda^*(t))$ et $f(t) = f(x(t), y(t), \lambda^*(t))$, on a :

$$\begin{aligned} V^* - V &= \int_0^T (f^*(t) - f(t))dt + F(y^*(T)) - F(y(T)) \\ &= \int_0^T ((H^*(t) - \lambda^*(t)y^{*\prime}(t)) - (H(t) - \lambda^*(t)y'(t)))dt + F(y^*(T)) - F(y(T)) \\ &= \int_0^T ((H^*(t) + \lambda^{*\prime}(t)y^*(t)) - (H(t) + \lambda^{*\prime}(t)y(t)))dt - \lambda^*(T)y^*(T) + \lambda^*(T)y(T) \\ &\quad + F(y^*(T)) - F(y(T)) \\ &= \int_0^T (H^*(t) - H(t) + \lambda^{*\prime}(t)(y^*(t) - y(t)))dt - \lambda^*(T)(y^*(T) - y(T)) \\ &\quad + F(y^*(T)) - F(y(T)) \\ &\geq \int_0^T (H'_{y(t)}(t)(y^*(t) - y(t)) + H'_{x(t)}(t)(x^*(t) - x(t)) + \lambda^{*\prime}(t)(y^*(t) - y(t)))dt \\ &\quad - \lambda^*(T)(y^*(T) - y(T)) + F'(y^*(T))(y^*(T) - y(T)) \\ &= \int_0^T (H'_{x(t)}(t)(x^*(t) - x(t)) + (H'_{y(t)}(t) + \lambda^{*\prime}(t))(y^*(t) - y(t)))dt \\ &\quad + (F'(y^*(T)) - \lambda^*(T))(y^*(T) - y(T)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La troisième égalité résulte de deux intégrations par parties qui annulent les termes $\lambda^*(0)y_0$. L'inégalité découle du théorème D.4 appliqué à H et F concaves. La dernière égalité provient du fait que le couple $(x^*(t), y^*(t))$ satisfait aux conditions CN^* . □

BIBLIOGRAPHIE

- Arrow K., M Nerlove, 1962, Optimal advertising policy under dynamic conditions, *Economica* 29, p. 129-142.
- Brealey R., S. Myers, F. Allen, 2006, Principes de gestion financière, 8^{ème} édition, Pearson.
- Clark C. W., F. H. Clarke, G. R. Munro, 1979, The Optimal Exploitation of Renewable Resource Stocks: Problems of Irreversible Investment, *Econometrica* 47, p. 25-47.
- Dantzig G. B., 1951, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. In T.C. Koopmans, éditeur, Activity Analysis of Production and Allocation, p. 339-347, Wiley, New York.
- Dockner E., G. Sorger, S. Jorgensen, N. Long, 2000, « Differential games in economics and management science », Cambridge University Press.
- Fershtman C., 1984, Goodwill and market shares in oligopoly, *Economica* 51, p. 271-281.
- Helmer J.-Y., 1970, « La commande optimale en économie », Dunod.
- Kamien M., N. Schwartz, 1991, Dynamic optimization, 2nd edition, North Holland.
- Innes R., 1990, Limited liability and incentive contracting with ex-ante actions choices, *Journal of Economic Theory* 52, p. 45-67.
- Lewis T., D. Sappington, 1989, Countervailing incentives in agency problems, *Journal of Economic Theory* 49, p. 294-313.
- Modigliani F., R. H. Brumberg, 1954, Utility analysis and the consumption function: an interpretation of cross-section data, in K. K. Kurihara, éditeur, Post-Keynesian Economics, p. 388-436, New Brunswick, NJ. Rutgers University Press.
- Mussa M., S. Rosen, 1978, Monopoly and product quality, *Journal of Economic Theory* 18, p. 301-317.
- Rasmusen E., 2004, « Jeux et information : Introduction à la théorie des jeux », De Boeck.
- Seierstad A., K. Sydsaeter, 1987, Optimal control theory, North Holland.
- Simon C., L. Blume, 1997, « Mathématiques pour économistes », De Boeck.
- Singh N., X. Vives, 1984, Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly, *RAND Journal of Economics* 15, p. 546-554.
- Solow R., 1956, A contribution to the theory of economic growth, *Quarterly Journal of Economics* 70, p. 65-94.
- Stokey N. L., R. E. Lucas Jr., E. C. Prescott, 1989, « Recursive Methods in Economic Dynamics », Harvard University Press.

Tobin J., 1969, A general equilibrium approach to monetary theory, *Journal of Money Credit and Banking* 1, p. 15–29.

Varian H., 2008, « Analyse microéconomique », 3^{ème} édition, De Boeck.

Wilson R., 1934, A scientific routine for stock control, *Harvard Business Review* 13, p. 116-128.

INDEX

A

argument maximum, 7

C

Calcul marginaliste, 4

Condition(s)

d'exclusion, 24

d'existence, 47

d'unicité, 10

de transversalité, 98

– horizon infini, 103

– problème autonome, horizon
infini, 103

du premier ordre et du second ordre, 8

nécessaire(s)

– contraintes dynamiques, 105

– de Kuhn et Tucker, deux
variables, 26

– de Kuhn et Tucker, une variable, 22

– de Kuhn et Tucker
particularisées, 41

– de Lagrange, 40

– du Principe d'optimalité, temps
continu, 118

– du Principe d'optimalité, temp
continu, horizon infini, 120

– du Principe d'optimalité, temps
discret, 113

– du Principe d'optimalité, temps
discret, horizon infini, 115

– du Principe du maximum, temps
continu, 95

– du Principe du maximum, temps
discret, 91

– optimisation libre, deux variables, 12

– optimisation libre, fonction
paramétrique, 17

– optimisation libre, une variable, 8

suffisante(s)

– du Principe d'optimalité, 124

– du Principe du maximum, 111

– optimisation contrainte, deux
variables, 35

– optimisation libre, deux variables, 12

– optimisation libre, une variable, 8

Contrainte, 3

coût d'opportunité de la, 29

de mouvement

– temps continu, 94

– temps discret, 89

de non-négativité, 41

libre, 20

mixte, 107

niveau de la, 22

pure, 108

régulière, 34

saturée, 20

Contrainte (*suite*)

- sous forme de liaison, 40
- supplémentaire, 45
- sur le contrôle, 105

Courbe de niveau, 14**D****Dualité, 42****E****Ensemble**

- compact, 47
- convexe, 38
- frontière d'un, 38
- majorant d'un, 6

Équation(s)

- à une inconnue, 11
- aux dérivées partielles, 118
- d'Hamilton-Jacobi-Bellman, 118
- différentielle, 94
- différentielles
 - système d', 95
- fonctionnelle de Bellman, 115
- récurrentes
 - système d', 92
- récurrente de Bellman, 113
- système d', 13, 24, 28

F**Fonction**

- concave, 3, 5
- convexe, 6
- croissante, 3, 5
- de classe C^2 , 3
- définition d'une 2, 4
- différentielle de la, 5

duale, 44**globalement croissante, 5****objectif, 3**

- taux marginal de substitution de la, 29

paramétrique, 17**point-col de la, 13****quasi-concave, 36****sous-modulaire, 18****supermodulaire, 18****terminale**

- et Principe d'optimalité, 120
- et Principe du maximum, 100

valeur

- de l'optimisation contrainte, 24
- du Principe d'optimalité, temps continu, 118
- du Principe d'optimalité, temps discret, 112
- du Principe du maximum, 95
- optimisation libre, 19
- problème autonome, horizon infini, 103

H**Hamiltonien, 91****L****Lagrangien, 22****généralisé, 106****point-col du, 42****M****Maximum, 6**

- global, 9
 - unique, 10

local, 9**Minimum, 7**

Multiplicateur

- coût marginal du respect de la
contrainte, 25
- de Kuhn et Tucker, 22
- de Lagrange, 40
- prix implicite de la contrainte, 25
- signe du, 46

P

Pivot, 52

Point de tangence

- courbe de niveau - coût d'opportunité, 30

Principe

- d'optimalité de Bellman, 111
- du maximum de Pontryagin, 91, 95

Problème**contraint**

- à deux variables, 27
- à une variable, 20

dynamique

- temps continu, 94
- temps discret, 89

libre

- à deux variables, 12
- à une variable, 8

paramétrique, 16**primal - dual, 44****S**

Solution en coin, intérieure, 42

Statique comparative, 17

T

Théorème de l'enveloppe, 18

V**Variable**

adjointe, 91

- coût marginal du respect de la
contrainte de mouvement, 92
- prix implicite de la variable
d'état, 92, 96

d'écart, 51

d'état, 89

de base, 51

de contrôle, 89

– en boucle fermée, 123

– en boucle ouverte, 123

de décision, 3

duale, 45

hors base, 51

primale

– et dualité, 45

– et méthode du simplexe, 51

TABLE DES MATIÈRES

Préface	v
Remerciements	vii
Introduction	ix

CHAPITRE 1

Optimisation statique	1
1.1 Fonctions : éléments de base et interprétations	2
1.1.1 <i>Fonction d'une variable</i>	2
1.1.2 <i>Fonction de deux variables</i>	4
1.2 Notion de maximum	6
1.3 Optimisation libre	7
1.3.1 <i>Une variable de décision</i>	8
A. Condition nécessaire et suffisante	8
B. Interprétation des conditions nécessaires et suffisantes	11
1.3.2 <i>Deux variables de décision</i>	12
A. Résolution algébrique	12
B. Résolution graphique	14
1.3.3 <i>Les problèmes paramétriques</i>	16
A. Statique comparative	17
B. Théorème de l'enveloppe	18
1.4 Optimisation sous contrainte	20
1.4.1 <i>Une variable de décision</i>	20
A. Le lagrangien	22
B. Recherche de la solution	22
C. Interprétations	24
1.4.2 <i>Deux variables de décision et plusieurs contraintes</i>	26
A. Présentation des conditions nécessaires	27
B. Interprétations des conditions nécessaires	28
C. Régularité des contraintes	32
1.4.3 <i>Conditions suffisantes</i>	35

1.5	Prolongements	40
1.5.1	<i>Autres types de contraintes</i>	40
	A. Contrainte sous forme d'égalité	40
	B. Contrainte de non-négativité	41
	C. Contraintes, solution intérieure et solution en coin	42
1.5.2	<i>Dualité</i>	42
1.5.3	<i>Difficultés dans la résolution</i>	45
	A. Principe de la contrainte supplémentaire	45
	B. Signe du multiplicateur	46
	C. Existence d'une solution	47
1.6	Programmation linéaire	48
1.6.1	<i>Présentation</i>	48
1.6.2	<i>Méthode du simplexe</i>	50
1.7	Applications	54
1.7.1	<i>Fonctions de l'entreprise</i>	54
	A. Gestion de stocks	54
	B. Gestion de production : programmation linéaire	56
	C. Gestion de trésorerie	59
1.7.2	<i>La détermination des choix</i>	61
	A. Choix dans un environnement certain : le modèle du consommateur	61
	B. Choix dans un environnement incertain : la demande d'assurance	65
1.7.3	<i>Analyse des interactions</i>	68
	A. Un petit détour par la théorie des jeux	68
	B. Le jeu de lobbying	69
	C. La concurrence entre firmes	71
1.7.4	<i>Asymétrie d'information</i>	73
	A. Tarification non linéaire	73
	B. Contrat de travail	77
1.8	Exercices	79

CHAPITRE 2

	Optimisation dynamique	85
2.1	L'idée de dynamique : un exemple	86
2.2	Problème dynamique : de l'exemple au cas général	88
2.2.1	<i>Variables d'état et de contrôle</i>	88
2.2.2	<i>Formulation du problème dans le cas général</i>	89
2.3	Contrôle optimal	90
2.3.1	<i>Recherche de la solution en temps discret</i>	90
	A. Le hamiltonien et les conditions nécessaires	91

	B. Interprétation de la variable adjointe : une première approche	92
2.3.2	<i>Solution en temps continu</i>	93
	A. Conditions nécessaires	93
	B. Interprétations	95
2.3.3	<i>Conditions de transversalité</i>	98
	A. La variable d'état à l'instant final n'est plus donnée	98
	B. L'objectif comprend une fonction terminale	100
	C. L'instant final n'est plus donné	101
2.3.4	<i>Prolongements</i>	102
	A. Horizon infini	102
	B. La gestion des contraintes dynamiques	105
2.3.5	<i>Conditions suffisantes</i>	111
2.4	Programmation dynamique	111
2.4.1	<i>Solution en temps discret</i>	112
	A. Horizon fini	112
	B. Horizon infini, problème autonome	114
2.4.2	<i>Solution en temps continu</i>	117
	A. Horizon fini	117
	B. Horizon infini	120
2.4.3	<i>Interprétations : lien avec le contrôle optimal</i>	121
2.4.4	<i>Conditions suffisantes</i>	124
2.5	Applications	124
2.5.1	<i>Contrôle Optimal</i>	125
	A. Problèmes dépendant du temps	125
	B. Asymétrie d'information	136
	C. Interactions	142
2.5.2	<i>Programmation dynamique</i>	145
2.6	Exercices	157
	Annexes	163
A	Calcul matriciel	164
A.1	<i>Présentation</i>	164
A.2	<i>Opérations sur les matrices</i>	165
	Addition de matrices	165
	Produit d'une matrice par un scalaire	166
	Produit de deux matrices	166
A.3	<i>Grandeurs associées aux matrices</i>	167
	Déterminant	167
	Rang	168
	Trace	168

A.4	<i>Inversion et diagonalisation</i>	169
	Matrice inverse	169
	Diagonalisation	169
A.5	<i>Formes quadratiques</i>	171
	Signe d'une forme quadratique	171
	Signe d'une forme quadratique soumise à des contraintes	172
A.6	<i>Vecteurs et matrices de l'optimisation</i>	174
B	Intégrales et primitives	175
B.1	<i>Présentation</i>	175
B.2	<i>Intégrales et fonctions</i>	177
C	Notions sur les équations	179
C.1	<i>Équation algébrique</i>	179
	Équation polynomiale d'ordre 2	179
	Système d'équations linéaires	179
	Le théorème des valeurs intermédiaires	180
C.2	<i>Équation différentielle (ED)</i>	180
	Présentation	181
	ED1	181
	SED1	184
C.3	<i>Équation aux dérivées partielles</i>	191
	EDP1 linéaire	192
	EDP1 quadratique	193
D	Démonstration des théorèmes	195
D.1	<i>Théorèmes sur les fonctions</i>	195
	Théorèmes de base	195
	Allure des fonctions d'une variable	197
	Allure des fonctions de deux variables	198
	Fonction supermodulaire	200
	Théorèmes des fonctions implicites et de la dérivée totale	201
	Fonction quasi-concave	202
D.2	<i>Théorèmes sur l'optimisation statique</i>	204
	Optimisation libre	204
	Optimisation contrainte	205
D.3	<i>Théorèmes sur l'optimisation dynamique</i>	207
	Principe du maximum	207
	Bibliographie	209
	Index	211